SÉRIE , N°
N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY,

PAR

M. Ernest FLAMARD.

1re **THÈSE.** — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES MÉTHODES NOUVELLES DE LA STATIQUE DES CONSTRUCTIONS.

2e **THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1913, devant la Commission d'Examen

MM. MOLK, *Président.*
VOGT, HUSSON, } *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

ÉRIE , N°
N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY,

PAR

M. Ernest FLAMARD.

1re **THÈSE.** — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES MÉTHODES NOUVELLES DE LA STATIQUE DES CONSTRUCTIONS.

2e **THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1913, devant la Commission d'Examen.

MM. MOLK, *Président.*
VOGT, HUSSON, *Examinateurs.*

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY

	MM.	
Doyen	FLOQUET.	
Assesseur	PETIT.	
Professeurs honoraires	HALLER.	
	BLONDLOT.	
	CARTAN.	
	BLAISE.	
	LE MONNIER.	
Chargé de cours honoraire	MILLOT.	
Professeurs	FLOQUET	Analyse.
	THOULET	Géologie et Minéralogie.
	MOLK	Mécanique rationnelle.
	CUÉNOT	Zoologie.
	GUNTZ	Chimie minérale.
	VOGT	Mathématiques appliquées.
	PETIT	Chimie agricole.
	MULLER	Chimie physique et électrochimie.
	NICKLÈS	Géologie.
	MINGUIN	Chimie.
	GUTTON	Physique.
	ROTHÉ	Physique.
	GRIGNARD	Chimie organique.
	GUYOT	Chimie appliquée à la teinture et à l'impression.
	WAHL	Chimie industrielle, en congé.
	HUSSON	Calcul différentiel et intégral.
	GAIN	Botanique.
	MAUDUIT	Électrotechnique.
Professeurs adjoints	BOUIN	Zoologie appliquée.
	REBOUL	Physique.
Chargé de cours	MAUGUIN	Minéralogie.
Maître de conférences	HACKSPILL	Chimie industrielle.
Directeurs de Laboratoires	HAHN	Laboratoire de Mécanique appliquée.
	WENCELIUS	Laboratoire d'analyses industrielles.
Chargés d'un cours complémentaire	MARSAL	Météorologie.
	QUIBY	Mécanique appliquée.
Secrétaire	ROVEL.	

53257 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

A MESSIEURS

HENRI VOGT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,
DIRECTEUR DE L'INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE DE NANCY.

BERTRAND DE FONTVIOLANT,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,
INGÉNIEUR EN CHEF DES CONSTRUCTIONS MÉTALLIQUES
A LA COMPAGNIE DE FIVES-LILLE.

CHARLES NIGOND,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES,
DIRECTEUR DE LA COMPAGNIE DES CHEMINS DE FER D'ORLÉANS.

ROGER COUVRAT-DESVERGNES,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES,
INGÉNIEUR EN CHEF DE LA VOIE ET DES TRAVAUX
DE LA COMPAGNIE D'ORLÉANS.

Hommage de profonde reconnaissance.
E. F.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547215_0031

PREMIÈRE THÈSE.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

STATIQUE DES CONSTRUCTIONS.

INTRODUCTION.

Les nombreux problèmes de la résistance des matériaux que la Statique pure laisse indéterminés nécessitent l'étude des déformations élastiques des corps ou systèmes de corps soumis à l'action d'efforts extérieurs, forces et couples, provoquant précisément ces déformations.

Cette étude peut être conduite de différentes façons, que nous rapporterons à trois grandes catégories :

1° *Recherche directe et géométrique des déformations produites par les efforts connus et inconnus, y compris les variations de température et tensions de pose.* — Les conditions imposées aux déformations par les liaisons du système élastique fournissent des équations permettant de déterminer les efforts inconnus et par déduction de faire l'étude complète de ce système.

Cette méthode, dont on peut faire remonter l'origine à Galilée, a été développée analytiquement et graphiquement dans un grand nombre d'Ouvrages et Mémoires devenus classiques. Elle fournit la solution des problèmes généraux (flexion, torsion, compression, traction) de la résistance des matériaux.

2° *Étude du travail de déformation du système élastique.* — La considération du travail produit par les forces extérieures et intérieures permet de simplifier les calculs relatifs à la recherche directe et géométrique des déformations, en ramenant la question à l'emploi d'un petit nombre de principes simples. Cette méthode est avantageuse dans les problèmes de flexion et de torsion et s'emploie avec facilité dans l'étude des systèmes articulés à barres surabondantes. Elle permet, avec de légères modifications, de tenir compte des variations de température et tensions de pose.

L'emploi systématique du travail de déformation comme moyen de recherche, remonte principalement à Castigliano, qui a basé sur cette notion générale, les théories et applications de la résistance des matériaux.

3° *Application du principe des vitesses virtuelles ou du travail virtuel.* — Les méthodes fondées sur ce principe ont été employées à l'origine par Mohr à propos des systèmes articulés. Elles permettent de résoudre très simplement et très rapidement les problèmes relatifs aux systèmes articulés à barres surabondantes. Les équations auxquelles conduit l'application du principe des vitesses virtuelles sont d'ordre tout à fait général, s'appliquent aux variations de température, et synthétisent en quelques formules toute la théorie de l'Élasticité des constructions.

L'étude des principes des méthodes nouvelles, fondées sur la notion de travail de déformation et sur l'application du théorème des vitesses virtuelles, sera l'objet principal du présent Mémoire.

Le premier Chapitre sera consacré à l'étude historique de la question. Dans le second Chapitre, nous rappellerons à grands traits les principes de la méthode géométrique des déformations. Le troisième Chapitre aura pour objet l'étude de la méthode du travail de déformation, question sur laquelle nous insisterons longuement. Le quatrième Chapitre traitera des méthodes fondées sur l'application du principe des vitesses virtuelles.

Enfin, pour terminer, nous donnerons un calcul d'application pratique, relatif à une ferme Polonceau renforcée par lignes de soutien, calcul que nous baserons sur la notion de travail de déformation.

CHAPITRE I.

HISTORIQUE.

Méthode géométrique des déformations. — L'emploi de la géométrie et du calcul dans les problèmes de la résistance des corps solides paraît remonter à Galilée [1] qui, en 1638, donna une théorie sommaire des poutres droites, s'appliquant plus spécialement aux solides encastrés. L'hypothèse adoptée par Galilée fut vite reconnue peu conforme aux lois de la Statique et de l'Expérience : cet auteur, en effet, plaçait la fibre neutre au point le plus bas de la section transversale et il admettait que les tensions développées en tous les points de cette section se composent en une seule force appliquée au centre de gravité.

Jacques Bernoulli [2], en 1705, modifia l'hypothèse de Galilée et basa la résistance des solides prismatiques soumis à flexion sur le principe actuellement admis d'après lequel toute section transversale, normale primitivement à la fibre moyenne, se déplace pendant la déformation, en demeurant, comme si elle était rigide, normale à la ligne élastique déformée, qui contient encore son centre de gravité.

Au XVIII[e] siècle, plusieurs grands géomètres, Euler [3] et Lagrange [4], publièrent des recherches analytiques sur les pièces courbes, en particulier sur la flexion des lames et ressorts. Cou-

---

[1] Galilée, *Discori e Demonstrazioni matematiche* (Leyde, 1638).

[2] Jacques Bernoulli, *Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort* (article du 12 mars 1705, publié dans les *Œuvres posthumes*, à Genève en 1744). Sur le sujet des origines de la résistance des matériaux, consulter l'Ouvrage de J. Todhunter and K. Pearson, *A History of the Theorie of Elasticity and of the Strength of materials* (Cambridge), t. I, 1886; t. II, 1893.

[3] Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, 1744.

[4] Lagrange, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, t. XXV, 1771 (1769); *Œuvres*, t. III, p. 77 à 110.

lomb ([5]) s'occupa du problème de la torsion des fils métalliques.

Mais c'est au XIX^e siècle que la question fit de grands progrès, et cela dans deux voies différentes. D'une part les travaux théoriques de Poisson ([6]), Cauchy ([7]), Lamé ([8]), Clebsch ([9]), Boussinesq ([10]), etc. créèrent une science nouvelle appelée *Théorie de l'Élasticité.*

D'autre part, sous l'influence des travaux de Navier ([11]), Barré de Saint-Venant ([12]), Poncelet ([13]), Clapeyron ([14]),

---

([5]) Coulomb, *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal* (*Histoire de l'Académie des Sciences*, 1784, éditée en 1787, p. 229).

([6]) Poisson, Mémoire sur « les surfaces élastiques » [*Mémoires de l'Institut de France pour* 1812 (1814), p. 167].

([7]) Cauchy, Premier Mémoire publié dans le *Bulletin des Sciences* par la Société philomatique de Paris (1823, p. 9). Les Mémoires importants sont publiés dans les *Exercices de Mathématiques*, t. II, 1827.

([8]) Lamé et Clapeyron, Mémoire sur « l'équilibre intérieur des corps homogènes », publié dans les *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences par divers savants*, t. IV, 1833, p. 465. — Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (1852).

([9]) Clebsch, *Theorie der Elastizität fester Körper* (Leipzig, 1862), édition française (*Théorie de l'élasticité des corps solides*) de B. de Saint-Venant et Flamant Paris, 1883.

([10]) Boussinesq, *Étude sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques* (*Journal de Liouville*, 2^e série, t. XVI, 1871, p. 125; 3^e série, t. V, 1879, p. 329).

([11]) Navier, *Résumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions*, année 1826. Cet Ouvrage paraît être le premier Cours didactique sur la Résistance des matériaux.

([12]) Barré de Saint-Venant, *Leçons de Mécanique appliquée* (1837-1838). *Résumé des leçons de Navier sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 3^e édition avec des Notes et Appendices et un Historique abrégé des recherches sur la résistance des matériaux et l'élasticité des corps solides (publié de 1857 à 1864). Un grand nombre d'Ouvrages dont les plus importants : Mémoire sur la « Torsion des prismes », Mémoire sur « l'équilibre intérieur des solides élastiques en général », publiés dans les *Mémoires des Savants étrangers*, t. XIV, 1855, p. 233 à 560.

([13]) Poncelet, *Cours de Mécanique industrielle fait aux artistes et ouvriers messins*, publié en différentes parties de 1827 à 1831. Nouvelle édition intitulée *Introduction à la Mécanique industrielle, physique et expérimentale*, 1839, et rééditée par Kretz en 1870.

([14]) Clapeyron (E.), *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLV, 1857, p. 1076).

Bresse ([15]), fondés sur le principe de Bernoulli, se développa une science d'application pratique, connue sous le nom de *Résistance des matériaux*. Les Ouvrages de ces auteurs sont d'ailleurs d'ordre analytique, mais avec Culmann ([16]), Ritter ([17]) et Mohr ([18]) apparaît la Géométrie de la résistance des matériaux, science pratique et féconde que Culmann constitua en un corps de doctrine appelé *Statique graphique*, en réunissant certains procédés géométriques de Coulomb, Poncelet, Chasles, etc.

Plus récemment, les travaux de Fränkel ([19]), Winckler ([20]), Föppl ([21]), Müller-Breslau ([22]) en Allemagne, Favaro ([23]), Crémona ([24]) en Italie, Collignon ([25]), Maurice Köchlin ([26]), Maurice Lévy ([27]), Bertrand de Fontviolant ([28]), Flamant ([29]),

---

([15]) Bresse (M.), *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes* (Paris, 1854). — *Cours de Mécanique appliquée* (1re édition, 1859-1865; 2e édition, 1880).

([16]) Culmann, *Die graphische Statik* (1re édition, 1866; 2e édition, 1875), édition française de G. Glasser, J. Jacquier et A. Valat (*Traité de Statique graphique*), Paris, 1880.

([17]) Ritter, *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuerlichen Balken* (Zurich, 1871). — *Anwendungen der graphischen Statik* (1888-1890).

([18]) Mohr, *La première théorie graphique de la poutre continue* (*Zeitschrift der Architecten und Ingenieur Vereins, Hannover*, 1874).

([19]) Fränkel, *Théorie des lignes d'influence* (*Civil-Ingenieur*, 1876).

([20]) Winkler, *Application des lignes d'influence* (*Zeitschrift... zu Hannover*, 1879). — *Theorie der Brücken* (1873-1875). — *Die maximale Momente einfacher Träger* (1875).

([21]) Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik* (t. V, nouvelle édition, 1907). — *Résistance des matériaux et éléments de la théorie mathématique de l'élasticité*, édition française de E. Hahn, 1901.

([22]) Muller-Breslau, *Elemente der graphischen Statik der Bauconstructionen*, 1881 (édition française de T. Seyrig, 1886). — *Die graphische Statik der Bauconstructionen* (1887-1892).

([23]) Favaro, *Lezioni di statica grafica* (traduction de P. Terrier), 1879-1885.

([24]) Crémona. *Le figure reciproche nella statica grafica* (complété par Jung et Saviotti), traduction de L. Bossut, 1872.

([25]) Collignon, *Cours de Résistance des matériaux* (1885).

([26]) Köchlin (M.), *Applications de la Statique graphique* (1889). 2 volumes, dernière édition, 1910.

([27]) Lévy (M.), *Traité de Statique graphique* (1884-1888). 4 volumes.

([28]) Fontviolant (B. de), *Calcul des Poutres continues, Bulletin de la Société des Ingénieurs civils* (septembre 1885).

([29]) Flamant, *Stabilité des constructions et résistance des matériaux* (dernière édition, 1909).

Résal ([30]) en France ont donné à la Résistance des matériaux et à la Statique graphique des développements considérables. Les Ouvrages de ces différents auteurs constituent la base de l'enseignement dans la théorie de l'Élasticité des constructions et à ce titre, le grand *Traité de Statique graphique* de M. Maurice Lévy, forme un remarquable ensemble didactique sur la matière.

Méthode du travail de déformation. — La méthode du travail de déformation apparaît implicitement dans les écrits de Daniel Bernoulli, qui a établi une loi du travail minimum et l'a communiquée à Euler ([31]). Celui-ci fait usage de cette loi dans la recherche de la ligne élastique d'une poutre droite de section et d'élasticité constantes ([32]).

Clapeyron, étudiant les systèmes articulés sans tensions initiales et à température invariable, par égalité des travaux des forces intérieures et extérieures, trouva l'équation fondamentale qui porte son nom et dont Lamé signala l'importance dans la statique des constructions ([33]).

Mais un résultat important dans la voie du travail de déformation, appartient au général Menabrea, qui énonça le principe d'élasticité ou du moindre travail dans son Mémoire intitulé : *Principe général pour déterminer les pressions et tensions d'un système élastique*. Ce Mémoire date de l'année 1868; cependant, dès l'année 1857, ce savant avait fait connaître à l'Académie des Sciences de Turin le nouveau principe d'élasticité qui devenait l'objet d'une Communication à l'Académie des Sciences de Paris ([34]).

([30]) Résal, *Stabilité des Constructions* (1901). — *Résistance des Matériaux* (1898). — *Ponts métalliques* (1908).

([31]) *Voir* Fuss, *Correspondance mathématique et physique*, t. II, p. 407, 503, 507.

([32]) Euler dans l'Appendice *De curvis elasticis* de son Ouvrage déjà cité.

([33]) En présentant ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'Elasticité* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXV, 1852, p. 459), Lamé mentionne un théorème général découvert par Clapeyron, et qui mérite le nom de *principe du travail des forces élastiques*. Clapeyron donne lui-même ce principe dans son Mémoire sur le travail des forces élastiques (*Comptes rendus*, t. XLVI, 1858, p. 208).

([34]) *Comptes rendus*, t. XLVI, 1858, p. 1056.

Dans la démontrastion qu'il en donnait à cette époque, le général Menabrea s'appuyait sur la considération de la transmission du travail dans les corps. Cette démonstration, trop subtile sans doute ou mal interprétée par les contemporains de l'auteur, fut critiquée, et c'est seulement dans le Mémoire de 1868 qu'on trouve un exposé à la fois simple et rigoureux du principe du travail minimum.

Plusieurs géomètres d'ailleurs, avant Menabrea, avaient entrevu quelques cas particuliers du principe général dont s'agit.

Vène, officier du Génie français, dans un écrit intitulé : *Mémoire sur les lois que suivent les pressions*, publié en 1836, mentionnait « que la somme des carrés des pressions produites par des poids est un minimum »; mais, pour démontrer cette proposition, d'ailleurs énoncée par l'auteur dès 1818, Vène a recours à des considérations philosophiques qui s'écartent de la rigueur mathématique. Pagani, professeur de Mathématiques à l'Université de Louvain, démontre ce même théorème dans plusieurs Mémoires ([35]). Mossotti a également donné une démonstration du théorème de Vène, dont un énoncé paraissait dès 1828 dans le *Bulletin* de Férussac ([36]). Mais les théorèmes de Vène, Pagani, etc. ne sont que des cas particuliers du principe tout à fait général d'élasticité énoncé et démontré par le général Menabrea dans son étude de Statique physique (année 1868). A cet effet, l'auteur traite une série de problèmes théoriques sur la distribution des tensions et pressions dans certains systèmes de barres élastiques, en vue de démontrer la coïncidence des résultats obtenus par la méthode des conditions géométriques avec ceux déduits du principe d'élasticité, puis il donne la démonstration générale du théorème du travail minimum. L'auteur montre que les équations déduites de ce théorème général à l'effet de déterminer les tensions élastiques ne sont autres que celles mêmes exprimant les conditions imposées par les liaisons au système proposé, et ainsi le Mémoire du général

---

([35]) *Voir* le Tome I, série 2, *Académie des Sciences de Turin* et le Tome VIII, *Académie des Sciences de Bruxelles.*

([36]) Cournot, Dorna, etc., s'occupèrent de la même question dans plusieurs publications. Les ingénieurs italiens portaient leurs recherches sur le problème des réactions s'exerçant sur les corps reposant sur plus de trois appuis. Cette question et son historique sont exposés par F. Bertelli (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Bologne*, t. I, 1843, p. 433).

Menabrea constitue un Ouvrage de transition entre la méthode purement géométrique et celle du travail de déformation ([37]).

Parallèlement au Mémoire du général Menabrea, il y a lieu de citer un Ouvrage spécial de Clerk Maxwell, Ouvrage peu étendu, mais riche en aperçus nouveaux et intitulé : *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames* ([38]). Dans cette publication, l'auteur développe au moyen de la loi de Clapeyron, la première théorie générale du système articulé, comportant des inconnues statiquement indéterminées. Maxwell, dans le paragraphe 9 de son Ouvrage, démontre le théorème sur la réciprocité des déplacements élastiques appelé par la suite *théorème de Maxwell*. Il est le premier à établir une relation entre les changements de longueur des barres et les déplacements corrélatifs des nœuds, en ce sens qu'il considère un système articulé comme une machine au moyen de laquelle une puissance vainc une résistance. L'égalité des travaux des forces extérieures et intérieures conduit l'auteur à l'équation fondamentale appélée plus tard *équation de Maxwell*, obtenue en considérant les forces comme des quantités croissant peu à peu de zéro à leurs valeurs finales.

L'Ouvrage de Maxwell ne fut pas remarqué comme il le méritait, peut-être en raison de sa forme condensée et de son caractère plutôt théorique, et il faut, en réalité, arriver à Castigliano pour trouver une méthode générale d'études et d'applications sur les systèmes élastiques, fondée sur le travail de déformation. Cette notion fondamentale sert de base à l'Ouvrage de l'auteur : *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, publié à Turin, en 1879, Ouvrage qui forme un des fondements de la théorie actuelle des constructions statiquement indéterminées. L'Ouvrage de Castigliano, en effet, ne se limite pas à la théorie relativement simple du système articulé : il contient de nombreuses applications à différents domaines de la résistance des matériaux et de la statique des constructions. A sa base, se trouvent le théorème fondamental

---

([37]) L'auteur, dans un Mémoire ultérieur (*Académie des Sciences de Paris*, 24 mars 1884), confirma pleinement ses conclusions relatives au Mémoire fondamental (1868). *Voir* à ce sujet, Maurice Lévy, *Statique graphique*, t. IV. p. 220, à propos de la Recherche des tensions des systèmes de barres élastiques.

([38]) Inséré dans le *Philosophical Magazine*, t. XXVII, 1864, p. 294.

des dérivées du travail de déformation et son corollaire, le théorème du travail minimum. Le théorème des dérivées du travail fut énoncé et démontré pour la première fois dans la dissertation fournie par l'auteur, à Turin, en 1872, en vue d'obtenir le diplôme d'Ingénieur. Ce théorème fut étendu par Castigliano dans son Mémoire : *Nouvelle théorie de l'équilibre des systèmes articulés* (39). Le théorème du travail minimum est une conséquence du théorème des dérivées du travail, mais nous avons vu que le principe du moindre travail avait été, pour ainsi dire, pressenti par plusieurs auteurs, Vène, Pagani, etc., surtout Menabrea, plusieurs années avant la découverte du théorème principal des dérivées du travail par Castigliano. Reprenant les résultats trouvés par B. de Saint-Venant, Castigliano étudie, à l'aide du théorème des dérivées du travail, les problèmes de l'élasticité relatifs à la compression ou tension, à la flexion ou torsion des prismes longs et minces, et enfin établit l'expression générale du travail de déformation dans une poutre quelconque. Dès lors, l'auteur développe un véritable traité de résistance des matériaux fondé sur les théorèmes précités. La théorie des poutres droites et courbes pleines ou à treillis, celle des pièces chargées de bout, etc., enfin, de nombreux exemples numériques forment un remarquable ensemble d'applications.

Les idées de Castigliano firent école en Allemagne tout d'abord, où elles furent approfondies par différents auteurs, tant au point de vue théorique qu'à celui des applications. Fränkel, en 1882, publiait une application du théorème du travail minimum à plusieurs problèmes de la Statique des constructions (40).

Könen, la même année, employait ce théorème pour la simplification des calculs dans la poutre continue (41).

Mohr, en 1883, donnait une application (42) du théorème de Castigliano et, dans un important Mémoire (43), ce même auteur rappelait

---

(39) *Actes de l'Académie de Turin* (1875).

(40) Fränkel, *Zeitschrift der Architecten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 1862, p. 63.

(41) Könen, *Wochenblatt für Architecten und Ingenieur*, 1882, p. 402.

(42) Mohr, *Zeitschrift der Architecten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 1883, p. 171.

(43) Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks* (*Civil-Ingenieur*, 1885, p. 289).

les travaux de Clapeyron et l'Ouvrage resté inaperçu de Maxwell.

. . . . . .

En France, on trouve un exposé succint du théorème du travail minimum dans les Notes du *Cours de Construction* de Brune ([44]); plusieurs questions de poutres et d'arcs sont traités au moyen de ce principe, en particulier le théorème des trois moments.

M. Maurice Lévy, dans son *Traité de Statique graphique*, t. IV, p. 220 parle du principe du moindre travail de Menabrea et l'applique à la détermination des tensions d'un système articulé à barres surabondantes.

Mais c'est surtout dans l'importante publication de M. B. de Fontviolant intitulée : *Mémoire sur les déformations élastiques des pièces et systèmes de pièces à fibre moyenne plane ou gauche* ([45]), qu'on trouve une exposition originale et personnelle de la théorie et des applications du travail de déformation à l'étude des systèmes élastiques employés en construction. Par une méthode nouvelle et différente de celle de Castigliano, l'auteur établit les théorèmes de réciprocité et les formules générales des déplacements linéaires et angulaires dans les poutres fléchies ou articulées.

Dans un autre Mémoire ([46]), M. de Fontviolant emploie ses formules générales réduites au terme de flexion, à la construction graphique des déformations et en fait le départ d'une étude approfondie sur les poutres continues et les arcs encastrés.

D'autre part, dans une publication ultérieure ([47]), l'auteur présente une méthode générale, toujours basée sur les formules générales précitées réduites au terme de flexion, à l'effet de déterminer les lignes d'influence dans les poutres pleines ou réticulaires assujetties à des conditions surabondantes.

Enfin, une application importante des formules de M. B. de Fontviolant est indiquée par cet auteur dans son Mémoire sur la *Statique graphique des arcs élastiques* ([48]). Cette étude fournit

---

([44]) Brune, *Cours de Construction professé à l'Ecole des Beaux-Arts* (1888).

([45]) B. de Fontviolant, *Bulletin des Ingénieurs civils*, août 1888, p. 291.

([46]) B. de Fontviolant, *Ibid.*, mars 1889, p. 416.

([47]) B. de Fontviolant, *Ibid.*, novembre 1890, p. 742.

([48]) B. de Fontviolant, *Bulletin des Ingénieurs civils*, avril 1890, p. 402; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX.

l'expression des déformations élastiques en fonction des moments conjugués en toutes les sections d'un arc, notion qui permet d'introduire les termes relatifs à la tension longitudinale et à l'effort tranchant dans les théorèmes de la Statique graphique des pièces courbes.

Méthode d'application du principe des vitesses virtuelles. — L'idée d'appliquer le théorème du travail virtuel à l'étude des déformations élastiques appartient en premier à Mohr qui, dans son Mémoire *Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerksträger* ([49]) détermine les tensions d'un système articulé comportant une seule tige surabondante. Dans les Mémoires suivants ([50]), l'auteur généralise l'emploi de la méthode des vitesses virtuelles et montre qu'elle s'applique au calcul des déformations et tensions d'un système articulé à un nombre quelconque de barres surabondantes, soumis ou non à des tensions de pose ou à des variations de température. Un aperçu de la méthode de Mohr se trouve dans la *Statique graphique* de M. Maurice Lévy (t. IV, p. 222) à propos de la recherche des tensions surabondantes d'un système de barres élastiques. Mais les principes et applications de cette méthode sont présentés d'une manière simple et complète dans l'Ouvrage de Mohr intitulé : *Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik* (Mémoire n° 11).

D'autre part, les applications du principe des vitesses virtuelles aux *systèmes quelconques* et aux problèmes généraux de la résistance des matériaux ont été considérés peu à peu par divers auteurs, en particulier G.R. Kirchhoff, et réunis en un corps de doctrine par Muller-Breslau, dans son Ouvrage *Die Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstructionen* ([51]). Dans ce Livre classique, la notion du travail virtuel conduit l'auteur à des équations générales auxquelles il donne le nom d'*équations de Maxwell*, bien qu'elles ne se rattachent que par la forme finale aux équations que Maxwell a déduites de la théorie de Clapeyron (*voir* Méthode du travail de déformation). On serait

---

([49]) Mohr, *Zeitschrift der Architecten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 1874, p. 223.

([50]) Mohr, *Ibid*, 1874, 1875, 1881, 1885.

([51]) 1re édition, 1886; 2e édition, 1893; 3e édition, 1904.

ainsi tenté de croire que l'emploi du théorème des vitesses virtuelles dans l'étude des systèmes élastiques remonte à Maxwell, tandis qu'en réalité cette idée appartient en propre à Mohr ([52]).

De plus, Müller-Breslau a réalisé la synthèse de la méthode du travail virtuel et de celle du travail de déformation, en montrant comment tous les résultats de la seconde peuvent être rattachés à la première. Ces deux méthodes ont d'ailleurs chacune leurs avantages particuliers. Celle du travail de déformation s'applique plus spécialement aux problèmes de flexion ; celle des vitesses virtuelles donne une solution rapide des questions relatives aux systèmes articulés. La méthode du travail virtuel est cependant plus féconde que celle du travail de déformation, en ce sens qu'elle peut faire intervenir des déplacements quelconques autres que les déplacements réels. Et cette supériorité relative à la considération de déplacements quelconques a conduit Föppl a établir et à généraliser les théorèmes de Castigliano pour un corps quelconque ([53]). Cet auteur, en effet, considère non seulement les déplacements virtuels des points d'application des forces connues, mais encore les variations virtuelles des tensions : il présente ainsi sous deux aspects différents les théorèmes de Castigliano généralisés.

Nous devons une mention toute spéciale à l'important Mémoire de M. B. de Fontviolant : *L'équation générale de l'Élasticité des Constructions* ([54]). Dans cet Ouvrage, l'auteur applique le principe des vitesses virtuelles à la recherche d'une équation générale qui synthétise toute la théorie de l'Élasticité des constructions. Cette relation est ainsi employée au calcul des déplacements élastiques et des tensions ou liaisons dans les pièces ou systèmes de pièces isostatiques et hyperstatiques. Les nombreuses applications présentées par l'auteur mettent en lumière la généralité et la fécondité des méthodes basées sur l'emploi du travail virtuel.

([52]) *Voir* Mohr dans son Ouvrage *Abhandlungen...* reproduisant un article du *Civil-Ingenieur*, 1885, p. 307, relatif à ce sujet.

([53]) Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, 1907 (t. V, Chap. V, p. 259).

([54]) *Bulletin des Ingénieurs civils* (octobre 1907), p. 365.

CHAPITRE II.

PRINCIPES DE LA METHODE GÉOMÉTRIQUE DES DÉFORMATIONS.

Nous nous proposons de résumer à grands traits les principes connus et les résultats généraux de la méthode directe ou géométrique des déformations dans l'étude des systèmes élastiques statiquement indéterminés.

1° Nous rappellerons tout d'abord que les Ouvrages classiques de Statique graphique et de Résistance des matériaux fournissent l'expression des déplacements linéaires u et v d'un point quelconque d'une poutre pleine, en projection sur deux axes de coordonnées, et celle du déplacement angulaire Θ d'une section arbitraire de cette même poutre (¹). Les formules en u et v sont exprimées en fonction des éléments statiques, moment fléchissant M, effort normal N, effort tranchant T, en tous les points et sections de la poutre, et tiennent compte des variations de température.

Ceci posé, le procédé général consiste à ramener la poutre pleine hyperstatique proposée, à l'état isostatique, par adjonction de liaisons surabondantes, X et K forces et couples, inconnues. Dès lors, si A représente un appui surabondant, à dilatation ou à rotule, on écrit que le déplacement linéaire de ce point, en projection sur la réaction X, est nul. De même, si B désigne un appui surabondant à encastrement, on écrit que la rotation de la section B, sous l'influence du couple surabondant K, est nulle. On aura ainsi des équations permettant de calculer les inconnues statiquement indéterminées, forces ou couples de liaisons.

Prenons, par exemple, la poutre continue à $(n+1)$ appuis

(¹) Maurice Lévy, *Statique graphique*, t. II, p. 27.

simples soumise à des charges verticales. Supprimons les $(n-1)$ appuis intermédiaires ou surabondants, en adjoignant à la poutre les $(n-1)$ réactions correspondantes et surabondantes inconnues, qui en tiennent lieu. La poutre continue est ainsi ramenée à la poutre droite à deux appuis simples, et l'on pourra calculer les déplacements verticaux au droit des appuis supprimés. Si l'on écrit que ces déplacements sont nuls, on aura $(n-1)$ équations linéaires à $(n-1)$ inconnues permettant de déterminer les réactions surabondantes et, partant, on pourra réaliser le calcul statique de la poutre proposée.

De même, si la poutre continue présente des encastrements d'appuis, on pourra les remplacer par des couples de réaction inconnus, qu'on déterminera en écrivant que les déplacements angulaires des sections d'encastrement sont nuls. Le problème de la poutre continue, par réduction, s'applique immédiatement aux poutres à une seule travée, encastrées ou semi-encastrées.

La méthode de calcul ci-dessus se présente naturellement et Grashof, dans son Ouvrage sur l'Élasticité (1), expose la question d'une manière très complète. M. B. de Fontviolant, dans son Mémoire sur le « Calcul des poutres continues » (2), utilise les mêmes principes et fait ressortir les avantages qui résultent de l'introduction des réactions et couples de réaction surabondants.

Cependant, cette méthode donne lieu à des calculs assez longs, de sorte que, dans les cas usuels, on recourra à la méthode géométrique de Clapeyron fondée sur le théorème des trois moments. On sait comment s'établit la relation de récurrence des trois moments, par la considération d'une déformée élastique à tangentes continues. A noter que ce théorème fut énoncé pour la première fois par Bertot (3), Ingénieur civil, et que la relation donnée plus tard par Clapeyron (4) est une généralisation de la formule de Bertot. Bresse, dans son *Cours de Mécanique appliquée*,

---

(1) Grashof, *Theorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendung in der Technik* (1re édition, 1866; 2e édition, 1878).

(2) B. de Fontviolant, *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils* (septembre 1885, p. 256).

(3) Bertot, *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*, 1855, p. 278.

(4) Clapeyron, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLV, 1857, p. 1076.

développa les résultats obtenus par Clapeyron, en envisageant l'effet, sur la poutre continue à appuis, de niveau ou non, de charges concentrées ou de surcharges uniformément réparties.

Au point de vue statique graphique de la poutre continue, il y a lieu de rappeler les travaux de Culmann, de Ritter et de Mohr. Ce dernier établit le théorème de la ligne élastique considérée comme polygone funiculaire de forces fictives et ramène la recherche des moments sur piles à la construction d'un second funiculaire, ainsi appelé par opposition au premier polygone funiculaire formé par l'ensemble des lignes funiculaires des différentes travées de la poutre continue. M. B. de Fontviolant a d'ailleurs substitué au second funiculaire de Mohr un autre funiculaire plus simple, appelé *polygone auxiliaire*.

Enfin M. Maurice Lévy dans sa *Statique graphique* (t. II, p. 151) a énoncé et démontré le théorème fondamental des deux moments dont il a fait la base de sa théorie analytique et graphique de la poutre continue. Cette proposition importante, généralisation d'un théorème donné précédemment par l'auteur (1), fournit immédiatement les foyers appelés *points fixes* par Bresse, ainsi que les moments de flexion en ces points, et c'est là une différence importante avec la méthode de Mohr, basée sur la recherche directe des moments sur piles.

Si maintenant nous considérons les pièces pleines en arc, la méthode des conditions géométriques s'applique d'une façon analogue. Pour un arc à deux rotules, par exemple, on écrit que le déplacement, suivant la corde d'une extrémité de l'arc reposant pour un instant sur un appui-plan, est nul, et l'on obtient une équation donnant la valeur de la poussée. Pour un arc encastré, on écrit que les déplacements linéaires d'une extrémité de l'arc rendue libre pour un instant, suivant la corde et une perpendiculaire à la corde, sont nuls : de plus, on écrit que la rotation de la section d'encastrement correspondante est nulle, etc.

Graphiquement, si l'on se borne aux termes de flexion, on a recours aux méthodes d'Eddy (2) et de M. Maurice Lévy. Ce der-

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (22 mars 1875), t. LXXX, p. 749.

(2) Eddy, *Researches in graphical Statics*, 1878.

nier auteur (*Statique graphique*, t. III) traite ainsi tous les cas d'arcs non statiques et sa théorie, pour chaque système d'arc, comme celle des poutres droites, repose sur un théorème fondamental susceptible de développements à la fois analytiques et graphiques.

2° Les méthodes géométriques ont été appliquées aux systèmes articulés statiquement indéterminés par différents auteurs, en particulier par M. Maurice Lévy (*Statique graphique*, t. IV).

Les formules de cet auteur pour les systèmes articulés hyperstatiques extérieurement (systèmes réticulaires à liaisons extérieures surabondantes) contiennent un terme de température et peuvent être exprimées en fonction des tensions des barres ou des moments de flexion du système articulé. Elles sont identiques à celles relatives aux pièces pleines, à cela près que les intégrales figurant dans le calcul de ces dernières sont remplacées par des sommations s'appliquant à un nombre limité de termes.

Dans le cas d'un système articulé hyperstatique intérieurement (à barres surabondantes), une relation importante de M. Maurice Lévy existant entre les dilatations des côtés et des diagonales d'un quadrilatère permet de trouver les tensions de ces barres et par suite de toutes les barres du système (1).

En ce qui concerne les déplacements élastiques d'un système réticulaire, leur construction graphique a été indiquée par M. Maurice Lévy (*Statique graphique*, t. IV, p. 131). A ce sujet nous rappellerons la méthode géométrique de Williot exposée dans les *Publications scientifiques industrielles*, année 1877, et dont on trouve un résumé avec applications dans la *Statique graphique des systèmes triangulés* de Th. Seyrig (2). Cette méthode suppose que le système réticulaire subit des déformations très petites, un côté ayant un point fixe et une direction fixe : elle fournit une approximation suffisante et est d'une application facile. Mais Mohr, dans son Ouvrage déjà cité, montre que le procédé de

---

(1) Maurice Lévy, Mémoire sur la « Recherche des tensions dans les systèmes de barres élastiques et sur les systèmes qui, à volume égal de matière, offrent la plus grande résistance possible » [*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (28 avril 1873)]. Ce Mémoire est reproduit dans le *Traité de Statique graphique* de l'Auteur, t. IV, p. 197.

(2) Th. Seyrig, *Encyclopédie des Aide-Mémoire Léauté.*

Williot est loin d'être général. Encore qu'il puisse s'appliquer à un système articulé possédant deux points fixes, il ne saurait résoudre beaucoup d'autres problèmes sur les déformations. Mohr applique à ces derniers sa méthode cinématique consistant en une décomposition du mouvement total en mouvements simultanés plus simples et en une composition graphique de ces mouvements. Müller-Breslau, dans sa *Statique graphique* (1) expose cette théorie de décomposition et composition de mouvements, dont le germe est dans le travail de Williot, mais qui en réalité est de Mohr.

Il y a lieu d'envisager les effets des variations de température dans les systèmes articulés surabondants. Tout d'abord, si l'on a des tensions de pose, on peut supposer des variations de température, différentes pour les barres successives, de façon à ramener leurs tensions à zéro. A l'état initial, les barres du système articulé sont donc à des températures $j_1, j_2, \ldots$ qui peuvent être différentes pour chacune d'elles et telles qu'à ces températures, il n'y ait aucune tension des barres lorsque les forces extérieures sont nulles. Si l'on porte alors les barres du système articulé à des températures $j'_1, j'_2, \ldots$, il existe des variations $j'_1 - j_1, j'_2 - j_2, \ldots$. On considère le système articulé privé de barres surabondantes, auquel on applique les variations de température données. A ces variations de température correspondent des dilatations ou contractions des barres du système, c'est-à-dire des variations de longueur des tiges surabondantes. On en déduit ainsi les tensions supplémentaires de ces barres surabondantes, et par suite celles des autres barres.

. . . . . .

Navier et Bresse, par des considérations géométriques, ont établi les expressions u et v des déplacements linéaires des points d'une poutre pleine, en projection sur deux axes de coordonnées. M. Maurice Lévy, dans le même sens, a exposé une méthode géométrique et cinématique, fondée sur la composition des translations et rotations élémentaires, subies par les points et sections de la poutre pendant sa déformation. Ce même auteur, par des considérations purement cinématiques, a établi les formules en u et v des déplacements linéaires, dans les systèmes articulés.

---

(1) Au Chapitre « Verschiebungspläne nach den Verfahren von Williot »

Il serait intéressant d'obtenir directement les déplacements linéaires L des points d'un système élastique quelconque, en projection sur des directions entièrement arbitraires. D'autre part, il y aurait avantage à exprimer les rotations Θ, subies par les différentes sections, non seulement en fonction des moments fléchissants M, comme dans la méthode géométrique des déformations, mais encore en fonction des efforts normaux et tranchants N et T, en tous les points et sections du système élastique considéré.

Les méthodes nouvelles fondées sur l'étude du travail de déformation et sur l'application du théorème des vitesses virtuelles répondent à ces questions, en ramenant la recherche des déplacements élastiques, partant celle des efforts de liaisons surabondantes d'un système donné, à l'emploi d'un petit nombre de principes simples et de toute généralité.

CHAPITRE III.

PRINCIPES DE LA MÉTHODE DU TRAVAIL DE DÉFORMATION.

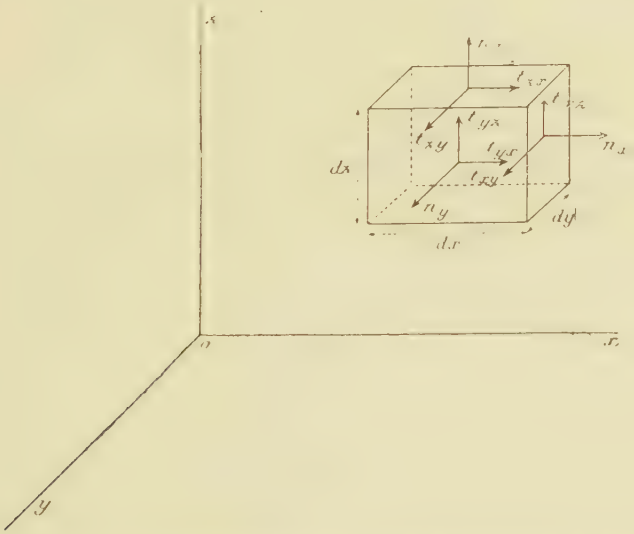
A. Nous allons tout d'abord établir l'expression générale du travail de déformation pour un corps élastique quelconque, en équilibre sous l'action de forces et couples extérieurs F et C donnés.

Le corps élastique considéré étant en équilibre, avant et après la déformation, on peut écrire, en vertu du théorème des forces vives :

$$\tau(F, C) + \tau(\varphi) = 0,$$

en désignant par $\tau(F, C)$ et $\tau(\varphi)$ les travaux respectifs des efforts

Fig. 1.



extérieurs F, C et des forces moléculaires φ, pendant la déformation. Le travail des forces de liaison relatives au corps élastique étudié est, par nature, essentiellement nul.

Décomposons le volume total en petits parallélépipèdes de dimensions dx, dy, dz, par des plans normaux aux axes des coordonnées (*fig.* 1). Si on applique aux faces de ces volumes élémentaires, des forces f normales et tangentielles, tenant en équilibre les forces moléculaires φ relatives à ces petits volumes, on aura évidemment :

$$\tau(f) + \tau(f) = 0,$$

et ainsi définitivement

$$\tau(F, C) = \tau(f).$$

On pourra donc évaluer le travail de déformation du corps considéré, en calculant celui dû aux forces normales et tangentielles f, extérieures aux volumes élémentaires. Supposons à cet effet, qu'on ait déterminé les efforts par unité de surface, n_x, n_y, n_z, t_{yz}, t_{zx}, t_{xy}, normaux et tangentiels, relativement à des directions d'éléments normaux aux axes de coordonnées. Désignons par ε_x, ε_y, ε_z les variations ou dilatations longitudinales par unité de longueur, et par i_{yz}, i_{zx}, i_{xy} les variations angulaires ou glissements. Les efforts extérieurs croissant peu à peu à partir de zéro, les forces appliquées normalement aux faces perpendiculaires à Ox croissent de zéro à $n_x\,dy\,dz$, en produisant une variation de longueur $\varepsilon_x\,dx$. Dès lors, si p est la valeur de la composante normale suivant Ox, lorsque la longueur dx a déjà subi un allongement a, on écrira, la déformation obéissant à la loi de Hoocke :

$$\frac{p}{dy\,dz} = \mathrm{E}\,\frac{a}{dx}, \qquad \text{d'où} \qquad p = \mathrm{E}\,\frac{dy\,dz}{dx}\,a.$$

Si l'on imagine un accroissement da de l'allongement a, le travail élémentaire correspondant sera $p\,da$ et le travail total deviendra

$$\begin{aligned}\int_{a=0}^{a=\varepsilon_x dx} p\,da &= \frac{\mathrm{E}\,dy\,dz}{dx}\int_0^{\varepsilon_x dx} a\,da \\ &= \frac{\mathrm{E}\,dy\,dz}{dx}\,\frac{(\varepsilon_x\,dx)^2}{2} = \frac{\mathrm{E}\,\varepsilon_x\,dx}{dx}\,dy\,dz\left(\frac{\varepsilon_x\,dx}{2}\right) \\ &= n_x\,dy\,dz\left(\frac{\varepsilon_x\,dx}{2}\right) = \frac{n_x\,\varepsilon_x\,dv}{2},\end{aligned}$$

dv étant le volume du parallélépipède élémentaire.

Les autres forces normales fournissent des travaux analogues.

Les forces tangentielles t_{xy} par unité de surface appliquées à deux faces opposées forment un couple dont les forces ont une valeur croissant de zéro à $t_{xy}\,dy\,dz$ et dont le bras de levier est dx; par un raisonnement analogue au précédent, on voit que leur travail est égal au demi-produit du moment $t_{xy}\,dy\,dz\,dx$ par la déviation angulaire i_{xy}. Ce travail est donc

$$\frac{t_{xy}\,dy\,dz\,dx}{2}\,i_{xy}=\frac{t_{xy}\,i_{xy}\,dv}{2}.$$

Les autres forces tangentielles fournissent des résultats similaires. De sorte que le travail de déformation du petit volume dv sera

$$\frac{dv}{2}(n_x\mathcal{E}_x+n_y\mathcal{E}_y+n_z\mathcal{E}_z+t_{yz}i_{yz}+t_{zx}i_{zx}+t_{xy}i_{xy}).$$

Or, on sait que les variations longitudinales et angulaires sont liées aux efforts intérieurs unitaires par les relations suivantes :

$$\mathcal{E}_x=\frac{1}{E}(n_x-\sigma n_y-\sigma n_z),\qquad i_{xy}=\frac{t_{xy}}{G},$$

$$\mathcal{E}_y=\frac{1}{E}(n_y-\sigma n_z-\sigma n_x),\qquad i_{yz}=\frac{t_{yz}}{G},$$

$$\mathcal{E}_z=\frac{1}{E}(n_z-\sigma n_x-\sigma n_y),\qquad i_{zx}=\frac{t_{zx}}{G},$$

E et G étant les coefficients d'élasticité longitudinale et transversale, σ coefficient de Poisson.

Donc le travail de déformation du petit parallélipipède sera

$$\frac{dv}{2E}(n_x^2+n_y^2+n_z^2-2\sigma n_y n_z-2\sigma n_z n_x-2\sigma n_x n_y)+\frac{dv}{2G}(t_{yz}^2+t_{zx}^2+t_{xy}^2).$$

En faisant la somme relative à tous les éléments dv de volume, on aura ainsi le travail total de déformation du corps, sous la forme

$$\tau=\int\int\int\left[\frac{dv}{2E}(n_x^2+n_y^2+n_z^2-2\sigma n_y n_z-2\sigma n_z n_x-2\sigma n_x n_y)+\frac{dv}{2G}(t_{yz}^2+t_{zx}^2+t_{xy}^2)\right].$$

Si l'on veut évaluer ce travail au moyen des variations linéaires et angulaires $\mathcal{E}$ et i, on remplacera les efforts n et t par leurs

valeurs en fonction de ces variations. On sait que

$$n_x = \mathrm{E}\frac{\varepsilon_x}{1+\sigma} + \mathrm{E}e\frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad t_{xy} = \mathrm{G}i_{xy},$$

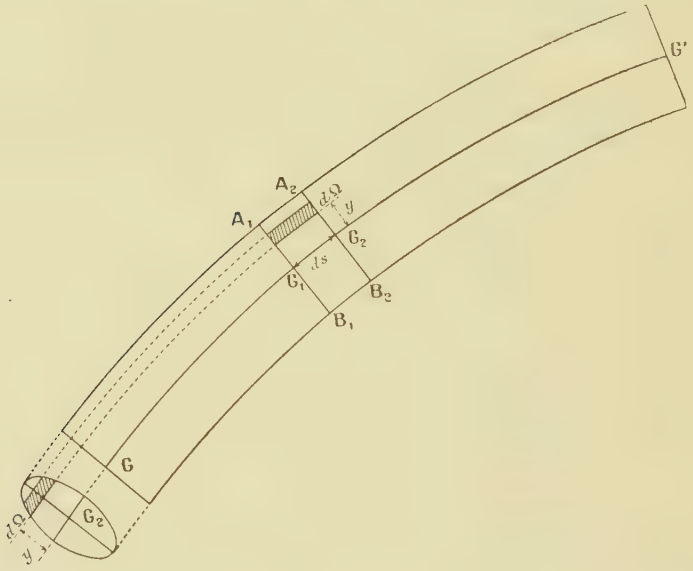
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

en posant $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, coefficient de dilatation cubique. Si définitivement on remplace E par $2(1+\sigma)\mathrm{G}$, on arrive au résultat

$$\tau = \int\int\int \mathrm{G}\,dv\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + e^2\frac{\sigma}{1-2\sigma} + \frac{i_{yz}^2 + i_{zx}^2 + i_{xy}^2}{2}\right).$$

Cette expression est la formule de Kirchhoff, relative au travail

Fig. 2



de déformation d'un corps élastique quelconque et sert de point de départ à la théorie du travail virtuel de déformation.

Nous allons examiner quelques cas particuliers simples. La détermination du travail dans les solides à plan médian de symétrie et à faibles dimensions transversales exige le calcul des efforts n_x, n_y, t_{xy}, tous les autres efforts moléculaires étant nuls, ce qui est encore compliqué.

Si nous adoptons les solides de la résistance des matériaux à

fibre moyenne plane, de grand rayon de courbure et à tangentes continues, nous aurons (*fig.* 2)

$$n_y = 0, \qquad n_z = 0, \qquad t_{yz} = t_{zx} = 0.$$

$n_x = \frac{N}{\Omega} - \frac{My}{I}$ d'après la formule connue de la flexion, obtenue en équilibrant le couple d'actions moléculaires normales par le couple extérieur, provenant des efforts F et C, M désignant le moment fléchissant, N l'effort normal relatifs à la section normale A_2B_2 de grandeur Ω et de moment d'inertie I.

$t_{xy} = \frac{T}{\Omega} g(y)$, $g(y)$ désignant la fonction donnant la répartition de l'effort tranchant T dans la section Ω. Cette fonction est prise égale à l'unité dans la pratique, lorsque la répartition est supposé uniforme, mais théoriquement les équations de l'élasticité appliquées à la résistance des matériaux donnent sa valeur en fonction de l'ordonnée y de l'élément $d\Omega$ de la section considérée. Par exemple, pour le rectangle de base b et de hauteur h, on a

$$g(y) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right);$$

pour le cercle de rayon r, on a

$$g(y) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right).$$

Dans ces conditions, pour le petit volume fibraire $d\Omega\, ds$, de surface $d\Omega$, compris entre deux sections très voisines A_1B_1 et A_2B_2 distantes de ds avant toute déformation, le travail de déformation sera

$$\frac{1}{2} ds\, d\Omega \left(\frac{n_x^2}{E} + \frac{t_{xy}^2}{G}\right).$$

Pour toute la tranche $A_1B_1A_2B_2$, ce travail aura pour expression

$$\frac{1}{2} ds \int_0^\Omega \left[\frac{1}{E}\left(\frac{N}{\Omega} - \frac{M_y}{I}\right)^2 + \frac{1}{G}\frac{T^2}{\Omega^2} g^2(y)\right] d\Omega$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{ds}{E}\left(\frac{M^2 I}{I^2} + \frac{N^2\Omega}{\Omega^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{ds}{G}\frac{T^2}{\Omega^2}\alpha\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{\alpha T^2}{G\Omega}\right) ds,$$

puisque

$$\int_0^\Omega y^2\, d\Omega = I,$$

moment d'inertie,

$$\int_0^{\Omega} y\, d\Omega = 0$$

moment statique, et en posant

$$\int_0^{\Omega} g^2(y)\, d\Omega = \alpha\Omega,$$

α étant un coefficient résultant de la distribution de l'effort tranchant dans la section, et voisin de l'unité.

Définitivement, pour la poutre pleine entière, le travail de déformation sera

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^{l}\left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{\alpha T^2}{G\Omega}\right) ds,$$

Dans le cas où la courbure de la pièce est accentuée, on sait qu'on a

$$n_x = \frac{1}{\Omega}\left(N + \frac{M}{r}\right) - \frac{yr}{r-y} \times \frac{M}{I}\mu,$$

μ étant un coefficient voisin de l'unité et égal à l'inverse de

$$\frac{r}{I}\sum \frac{\omega y^2}{r-y},$$

r rayon de courbure au point G_2 de la section transversale A_2B_2, à laquelle correspondent les éléments statiques M, N, T. La répar-

Fig. 3.

tition de l'effort tranchant, étant indépendante de la courbure de la pièce, est la même que plus haut, et l'on a, par un calcul analogue, pour expression du travail de déformation,

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^{l}\left(\frac{\mu M^2}{EI} + \frac{\left(N + \frac{\mu}{r}\right)^2}{E\Omega} + \frac{\alpha T^2}{G\Omega}\right) ds.$$

Enfin, considérons le cas d'un arbre droit de section circulaire constante ou variable, soumis à la fois à la torsion et à la flexion (*fig.* 3). Soit M_t le moment de torsion en une section transversale; il provoque, en un point tel que A à distance ρ du centre, un effort tangentiel, normal à OA et égal par unité de surface à $t_\rho = \frac{M_t \rho}{I_p}$, I_p étant le moment d'inertie polaire de la section transversale. De plus, l'effort tranchant T, réparti uniformément ou non produit des efforts t_{xy} par unité de surface. L'effort de cisaillement total t_c par unité de surface en A est donc la résultante de t_ρ et t'_{xy}. Nous devons calculer la somme

$$\sum \frac{t_c^2\, dv}{2G} = \sum \left[t_\rho^2 + t'^2_{xy} + 2\, t_\rho\, t'_{xy} \cos(t_\rho, t'_{xy}) \right] \frac{d\Omega\, ds}{2G}.$$

En remarquant que les doubles produits relatifs à deux points A et A′ symétriques par rapport au centre ont une somme nulle, on est ramené à effectuer séparément le calcul pour la torsion et l'effort tranchant.

La première partie donne pour tous les éléments d'une section

$$\sum \frac{t_\rho^2\, d\Omega}{2G} = \frac{M_t^2 \sum \rho^2\, d\Omega}{2GI_p^2} = \frac{M_t^2 I_p}{2GI_p^2} = \frac{M_t^2}{2GI_p}.$$

La seconde partie donne le même résultat que plus haut.

De sorte qu'on a finalement pour expression du travail de déformation dû à la flexion et à la torsion

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{M_f^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{\alpha T^2}{G\Omega} + \frac{M_t^2}{GI_p} \right) ds.$$

Reprenons plus spécialement les poutres pleines de la résistance des matériaux (*fig.* 2) soumises à l'action de forces toutes situées dans un même plan de symétrie de la pièce; nous aurons pour expression du travail de déformation

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} \right) ds,$$

M, N, T étant les moment fléchissant, effort normal, effort tranchant supposé uniformément réparti, provoqués par les efforts extérieurs en tout point de la poutre. Cette relation importante, que nous venons de trouver en particularisant l'expression générale du travail de déformation, peut être établie en partant directement des hypothèses de la résistance des matériaux. En effet, supposons

toujours que les forces et couples extérieurs agissant sur la poutre croissent progressivement et sans vitesse de zéro à leurs valeurs finales. L'effort normal, à un instant donné, pendant la déformation, relativement à la section A_2B_2 de surface Ω, est proportionnel à l'allongement $d\lambda$ de la tranche ds et a pour valeur d'après la loi de Hoocke, $\frac{E\Omega\, d\lambda}{ds}$. Le travail total pour la tranche ds, provoqué par cet effort normal passant graduellement de zéro à N, en produisant une variation de longueur $\Delta(ds)$ sera

$$\frac{E\Omega}{ds}\int_0^{\Delta(ds)} d\lambda\, d(d\lambda) = \frac{E\Omega}{2\,ds}[\Delta(ds)]^2 = \frac{E\Omega}{2\,ds}\left(\frac{N\,ds}{E\Omega}\right)^2 = \frac{N^2}{\Omega^2}\,\frac{\Omega\,ds}{2E} = \frac{N^2\,ds}{2E\Omega}.$$

Semblablement le travail de déformation de la tranche ds, relativement à l'effort tranchant supposé uniformément réparti, sera $\frac{T^2\,ds}{2G\Omega}$.

Enfin, pour le travail de déformation de la tranche ds, relativement à la flexion, on a, par analogie à celui dû à l'effort normal,

$$\int_0^{\Omega} \frac{w^2}{d\Omega^2}\,\frac{d\Omega\,ds}{2E},$$

$d\Omega$ étant la surface d'une bande élémentaire de la section Ω, d'ordonnée y par rapport à l'axe neutre de cette section, cette bande élémentaire étant soumise à une force w de tension ou compression normale par flexion, supposée uniformément répartie sur $d\Omega$. Mais

$$\frac{w^2}{d\Omega^2} = \left(-\frac{My}{I}\right)^2,$$

d'après la relation connue de la flexion simple, et ainsi l'on a, pour le travail de flexion de la tranche ds,

$$\int_0^{\Omega} \frac{M^2y^2}{I^2}\,\frac{d\Omega\,ds}{2E} = \frac{M^2\,ds}{2EI^2}\int_0^{\Omega} y^2\,d\Omega = \frac{M^2\,ds}{2EI^2}\,I = \frac{M^2\,ds}{2EI}.$$

Le travail de déformation pour la tranche ds est donc au total

$$\frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega}\right)ds$$

et définitivement pour la poutre de longueur l, ce travail sera

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^{l}\left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega}\right)ds.$$

C'est une fonction des efforts extérieurs F et C agissant sur la poutre, pouvant être calculée dans tous les cas et indépendante de la loi de variation de ces efforts extérieurs, passant progressivement d'une intensité nulle à leurs valeurs finales.

Pour un système élastique quelconque composé de Q pièces droites ou courbes assemblées ou articulées, le travail de déformation sera par généralisation

$$\tau = \sum_{1}^{Q} \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} \right) ds.$$

On peut regarder ce système total comme un ensemble de systèmes partiels isostatiques réunis deux à deux par des forces et couples de liaisons surabondantes, et écrire

$$\tau = \tau_P + \tau_S = \sum_{1}^{P} \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} \right) ds + \sum_{P+1}^{Q} \frac{1}{2} \int_{0}^{\lambda} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} \right) ds$$

en désignant par τ_p le travail de déformation de l'un des systèmes partiels pris comme système principal, et par τ_s la somme des travaux de déformation des systèmes partiels restants.

En particulier, pour un système articulé soumis à des efforts agissant aux nœuds et en dehors des nœuds, on aura

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{0}^{q} \int_{0}^{l} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} \right) ds$$

ou encore

$$\tau = \tau_P - \tau_S = \frac{1}{2} \sum_{1}^{p} \int_{0}^{l} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} \right) ds + \frac{1}{2} \sum_{p+1}^{q} \int_{0}^{\lambda} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} \right) ds,$$

q étant le nombre total des barres du système articulé, auquel correspond un système principal à p barres $= (2s - 3) < q$.

Dans le cas usuel où les forces extérieures sont exclusivement appliquées aux nœuds, on a

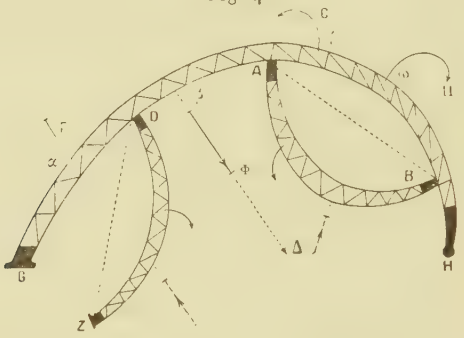
$$M = 0, \qquad T = 0,$$

N constant le long de chaque barre ; le travail de déformation s'écrit

$$\tau = \frac{1}{2}\sum_{1}^{q}\frac{N^2 l}{E\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{p}\frac{N^2 l}{E\Omega} + \frac{1}{2}\sum_{p+1}^{q}\frac{N^2\lambda}{E\Omega}.$$

B. Soit un système élastique quelconque formé de Q pièces droites ou courbes assemblées ou articulées, en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs, forces et couples F et C agissant dans le plan de ce système, et reposant sur un certain nombre d'appuis rigides et sans frottement, à dilatation, à rotule ou à encastrement (*fig.* 4).

Fig. 4.



Proposons-nous de trouver l'expression du déplacement linéaire, en projection sur une direction donnée Δ, d'un point arbitraire β de ce système et cherchons en même temps l'expression du déplacement angulaire d'une section quelconque ω du système considéré. Nous supposerons plus généralement qu'aucune force extérieure n'agit directement en β et qu'aucun couple extérieur n'est directement appliqué à la section ω.

A cet effet, plaçons en β une force auxiliaire Φ, de grandeur arbitraire mais finie, ayant la direction βΔ du déplacement linéaire projeté cherché. De même, appliquons à la section ω un couple auxiliaire Π, de grandeur quelconque mais finie, ayant le sens du déplacement angulaire qu'on veut évaluer.

Le système élastique est donc soumis à l'action des efforts extérieurs donnés, force F agissant au point α, couple C appliqué à la section γ, et arbitraires Φ, Π agissant au point β et sur la section ω. Les efforts extérieurs donnés F et C sont d'ailleurs en nombre quelconque : nous généraliserons au moyen du principe de superposition.

Désignons par :

L_α, $\lambda_{\alpha\alpha}$, $\lambda_{\alpha\beta}$, $\lambda_{\alpha\gamma}$, $\lambda_{\alpha\omega}$ les déplacements linéaires du point α en projection sur F ;

L_β, $\lambda_{\beta\alpha}$, $\lambda_{\beta\beta}$, $\lambda_{\beta\gamma}$, $\lambda_{\beta\omega}$ les déplacements linéaires du point β en projection sur Φ ;

Θ_γ, $\theta_{\gamma\alpha}$, $\theta_{\gamma\beta}$, $\theta_{\gamma\gamma}$, $\theta_{\gamma\omega}$ les déplacements angulaires de la section γ comptés autour de l'axe du couple C ;

Θ_ω, $\theta_{\omega\alpha}$, $\theta_{\omega\beta}$, $\theta_{\omega\gamma}$, $\theta_{\omega\omega}$ les déplacements angulaires de la section ω comptés autour de l'axe du couple Π ;

déplacements linéaires projetés et angulaires provoqués respectivement aux points α, β et dans les sections γ, ω par l'action séparée, de l'ensemble des efforts extérieurs F, C, Φ, Π, et de chacun de ces efforts F, C, Φ, Π *supposés égaux à l'unité*. Les λ et θ sont des coefficients d'influence qui ne dépendent que des dimensions des pièces du système et des points ou sections d'application α, β, γ, ω des efforts extérieurs.

En vertu du principe de superposition des effets élastiques des forces et couples, on peut écrire :

$$(1)\qquad \begin{cases} L_\alpha = \lambda_{\alpha\alpha} F + \lambda_{\alpha\beta} \Phi + \lambda_{\alpha\gamma} C + \lambda_{\alpha\omega} \Pi, \\ L_\beta = \lambda_{\beta\alpha} F + \lambda_{\beta\beta} \Phi + \lambda_{\beta\gamma} C + \lambda_{\beta\omega} \Pi, \\ \Theta_\gamma = \theta_{\gamma\alpha} F + \theta_{\gamma\beta} \Phi + \theta_{\gamma\gamma} C + \theta_{\gamma\omega} \Pi, \\ \Theta_\omega = \theta_{\omega\alpha} F + \theta_{\omega\beta} \Phi + \theta_{\omega\gamma} C + \theta_{\omega\omega} \Pi, \end{cases}$$

Désignons par $\tau(F, \Phi, C, \Pi)$ le travail effectué pendant la déformation par les efforts extérieurs, forces et couples passant progressivement et sans vitesse de zéro à leurs valeurs finales. Pour nous rendre compte de cette fonction, cherchons sa différentielle totale en donnant à F, Φ, C, Π des accroissements infiniment petits dF, $d\Phi$, dC, $d\Pi$; nous aurons

$$(2)\qquad d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial F} dF + \frac{\partial \tau}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial \tau}{\partial C} dC + \frac{\partial \tau}{\partial \Pi} d\Pi.$$

Évaluons d'une autre manière cette différentielle. Comme il s'agit en somme de travaux qui sont ceux de forces intérieures, le système est conservatif et dépend d'une fonction de forces. On peut évaluer le travail produit finalement par l'ensemble

$$F + dF, \quad \Phi + d\Phi, \quad C + dC, \quad \Pi + d\Pi$$

comme étant la somme des travaux obtenus en parvenant d'abord

graduellement à l'ensemble F, Φ, C, Π, puis donnant aux forces et couples, à partir de cet état, des accroissements $d\mathrm{F}$, $d\Phi$, $d\mathrm{C}$, $d\Pi$.

Pendant la première partie, le travail atteint la valeur τ et les déplacements linéaires projetés et angulaires atteignent les valeurs L_α, L_β, Θ_γ, Θ_ω. Pendant la seconde partie, les efforts extérieurs varient de F, Φ, C, Π à $\mathrm{F}+d\mathrm{F}$, $\Phi+d\Phi$, $\mathrm{C}+d\mathrm{C}$, $\Pi+d\Pi$ et les déplacements L_α, L_β, Θ_γ, Θ_ω prennent des accroissements $d\mathrm{L}_\alpha$, $d\mathrm{L}_\beta$, $d\Theta_\gamma$, $d\Theta_\omega$. L'accroissement $d\tau$ du travail de déformation est donc compris entre

$$\mathrm{F}\,d\mathrm{L}_\alpha+\Phi\,d\mathrm{L}_\beta+\mathrm{C}\,d\Theta_\gamma+\Pi\,d\Theta_\omega$$

et

$$(\mathrm{F}+d\mathrm{F})\,d\mathrm{L}_\alpha+(\Phi+d\Phi)\,d\mathrm{L}_\beta+(\mathrm{C}+d\mathrm{C})\,d\Theta_\gamma+(\Pi+d\Pi)\,d\Theta_\omega.$$

Sa partie principale est donc

$$d\tau=\mathrm{F}\,d\mathrm{L}_\alpha+\Phi\,d\mathrm{L}_\beta+\mathrm{C}\,d\Theta_\gamma+\Pi\,d\Theta_\omega. \tag{3}$$

Or, en différentiant les relations (1), on aura $d\mathrm{L}_\alpha$, $d\mathrm{L}_\beta$, $d\Theta_\gamma$, $d\Theta_\omega$ qu'on reportera dans (3). Dès lors, si l'on identifie les relations (3) et (2), on pourra écrire

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tau}{\partial\mathrm{F}}=\lambda_{\alpha\alpha}\mathrm{F}+\lambda_{\beta\alpha}\Phi+\theta_{\gamma\alpha}\mathrm{C}+\theta_{\omega\alpha}\Pi, \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial\Phi}=\lambda_{\alpha\beta}\mathrm{F}+\lambda_{\beta\beta}\Phi+\theta_{\gamma\beta}\mathrm{C}+\theta_{\omega\beta}\Pi, \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial\mathrm{C}}=\lambda_{\alpha\gamma}\mathrm{F}+\lambda_{\beta\gamma}\Phi+\theta_{\gamma\gamma}\mathrm{C}+\theta_{\omega\gamma}\Pi, \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial\Pi}=\lambda_{\alpha\omega}\mathrm{F}+\lambda_{\beta\omega}\Phi+\theta_{\gamma\omega}\mathrm{C}+\theta_{\omega\omega}\Pi. \end{cases}$$

Ceci posé, les dérivées partielles de τ doivent satisfaire aux conditions

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\tau}{\partial\mathrm{F}\,\partial\Phi}=\dfrac{\partial^2\tau}{\partial\Phi\,\partial\mathrm{F}}, & \text{d'où} \quad \lambda_{\beta\alpha}=\lambda_{\alpha\beta}; \\ \dfrac{\partial^2\tau}{\partial\mathrm{F}\,\partial\mathrm{C}}=\dfrac{\partial^2\tau}{\partial\mathrm{C}\,\partial\mathrm{F}}, & \text{d'où} \quad \theta_{\gamma\alpha}=\lambda_{\alpha\gamma}; \\ \dfrac{\partial^2\tau}{\partial\mathrm{F}\,\partial\Pi}=\dfrac{\partial^2\tau}{\partial\Pi\,\partial\mathrm{F}}, & \text{d'où} \quad \theta_{\omega\alpha}=\lambda_{\alpha\omega}; \\ \dfrac{\partial^2\tau}{\partial\Phi\,\partial\mathrm{C}}=\dfrac{\partial^2\tau}{\partial\mathrm{C}\,\partial\Phi}, & \text{d'où} \quad \theta_{\gamma\beta}=\lambda_{\beta\gamma}; \\ \dfrac{\partial^2\tau}{\partial\Phi\,\partial\Pi}=\dfrac{\partial^2\tau}{\partial\Pi\,\partial\Phi}, & \text{d'où} \quad \theta_{\omega\beta}=\lambda_{\beta\omega}; \\ \dfrac{\partial^2\tau}{\partial\mathrm{C}\,\partial\Pi}=\dfrac{\partial^2\tau}{\partial\Pi\,\partial\mathrm{C}}, & \text{d'où} \quad \theta_{\omega\gamma}=\theta_{\gamma\omega}. \end{cases}$$

Ces relations (5) sont appelées *relations de réciprocité* relativement aux déplacements linéaires et angulaires d'un système élastique et généralisent le théorème de Maxwell sur la question. On peut les énoncer de la façon suivante :

1° Si une force $F = 1$ appliquée en un point α d'un système élastique suivant une direction αF, imprime à un autre point β de ce système un déplacement linéaire projeté sur $\beta\Phi$ de valeur $\lambda_{\beta\alpha}$, réciproquement une force $\Phi = 1$ appliquée au point β suivant la direction $\beta\Phi$ provoque un déplacement linéaire du point α qui, en projection sur αF, a pour valeur $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha}$.

2° Si une force $F = 1$ agissant en un point α d'un système élastique, suivant une direction αF, produit dans une section γ un déplacement angulaire $\theta_{\gamma\alpha}$, réciproquement un couple $C = 1$ appliqué à la section γ imprime au point α un déplacement linéaire qui, en projection sur αF, a pour valeur $\lambda_{\alpha\gamma} = \theta_{\gamma\alpha}$ (de même : $\lambda_{\alpha\omega} = \theta_{\omega\alpha}$, $\lambda_{\beta\gamma} = \theta_{\gamma\beta}$, $\lambda_{\beta\omega} = \theta_{\omega\beta}$).

3° Enfin, si un couple $C = 1$ agissant sur une section γ imprime à une autre section ω du système un déplacement angulaire $\theta_{\omega\gamma}$, réciproquement un couple $\Pi = 1$ appliqué à la section ω imprime à la section γ un déplacement angulaire $\theta_{\gamma\omega} = \theta_{\omega\gamma}$.

Si maintenant nous revenons aux relations (4), on pourra les écrire en vertu de (5) :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tau}{\partial F} = \lambda_{\alpha\alpha} F + \lambda_{\alpha\beta}\Phi + \lambda_{\alpha\gamma} C + \lambda_{\alpha\omega}\Pi, \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial\Phi} = \lambda_{\beta\alpha} F + \lambda_{\beta\beta}\Phi + \lambda_{\beta\gamma} C + \lambda_{\beta\omega}\Pi, \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial C} = \theta_{\gamma\alpha} F + \theta_{\gamma\beta}\Phi + \theta_{\gamma\gamma} C + \theta_{\gamma\omega}\Pi, \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial\Pi} = \theta_{\omega\alpha} F + \theta_{\omega\beta}\Phi + \theta_{\omega\gamma} C + \theta_{\omega\omega}\Pi, \end{cases}$$

Définitivement, en identifiant les relations (6) et (1), on aura

$$L_\alpha = \frac{\partial\tau}{\partial F}, \qquad L_\beta = \frac{\partial\tau}{\partial\Phi}, \qquad \theta_\gamma = \frac{\partial\tau}{\partial C}, \qquad \theta_\omega = \frac{\partial\tau}{\partial\Pi},$$

formules fondamentales qui traduisent *le théorème des dérivées du travail* de Castigliano, théorème que nous énoncerons comme suit.

Dans un système élastique quelconque, assujetti à des liaisons hyperstatiques ou non :

1° *Les dérivées partielles du travail de déformation par rapport aux forces extérieures sont égales aux déplacements des points d'application de ces forces, en projection sur leurs propres directions. Ces déplacements linéaires projetés sont comptés positivement suivant la direction des forces correspondantes, négativement dans le cas contraire ;*

2° *Les dérivées partielles du travail de déformation par rapport aux moments des couples extérieurs sont égales aux rotations subies, autour des axes portant ces moments, par les sections d'application de ces couples. Ces déplacements angulaires sont comptés positivement dans le sens de rotation des couples correspondants, négativement dans le cas contraire.*

Le théorème des dérivées du travail permet donc de trouver le déplacement linéaire d'un point quelconque d'un système élastique, en projection sur une direction arbitrairement choisie, et cela encore bien que le point, β par exemple, ne soit pas un point d'application de force extérieure. Il suffit, dans ce cas, d'appliquer, comme nous l'avons fait, au point β une force auxiliaire Φ de direction donnée Δ. Le système élastique est ainsi soumis à l'action des efforts extérieurs F, C, Φ, et le théorème de Castigliano permet d'écrire $L_\beta = \frac{\partial \tau}{\partial \Phi}(F, C, \Phi)$, expression dans laquelle on fera finalement Φ = 0, puisqu'en réalité aucune force extérieure n'agit au point β.

On procédera d'une façon identique dans la recherche du déplacement linéaire du point d'application d'une force donnée existant réellement, en projection sur une direction différente de celle de cette force.

Semblablement, le théorème des dérivées du travail permet de trouver la rotation subie par une section quelconque du système élastique, même si cette section, ω par exemple, n'est pas soumise à l'action d'un couple extérieur directement appliqué à elle-même. Il suffit, dans ce cas, d'opérer comme plus haut, en adjoignant à la section ω un couple auxiliaire Π ayant le sens du déplacement cherché. Le système est ainsi soumis aux efforts extérieurs F, C, Π ; on écrira donc $\Theta_\omega = \frac{\partial \tau}{\partial \Pi}(F, C, \Pi)$, expression dans laquelle on fera finalement Π = 0 puisque la section ω n'est soumise à aucun couple réel directement appliqué.

La relation générale des déplacements linéaires des points d'un système élastique est donc

$$L_\beta = \frac{\partial \tau}{\partial \Phi}(F, C, \Phi) \tag{7}$$

et semblablement celle des déplacements angulaires des sections de ce même système est

$$\theta_\omega = \frac{\partial \tau}{\partial \Pi}(F, C, \Pi). \tag{8}$$

Ces deux relations admettent les cas particuliers

$$L_\alpha = \frac{\partial \tau}{\partial F}(F, C), \tag{7'}$$

$$\theta_\gamma = \frac{\partial \tau}{\partial C}(F, C), \tag{8'}$$

formules exprimant le déplacement linéaire du point d'application d'une force donnée F en projection sur cette force, et le déplacement angulaire d'une section soumise à l'action directe d'un couple extérieur réel C.

Les calculs, que nous venons de développer et qui conduisent aux expressions générales des déplacements linéaires et angulaires des points et sections d'un système élastique, reposent sur un procédé de différentiation (théorèmes de Castigliano). Nous allons exposer dans le même sens un procédé d'intégration (formules de M. B. de Fontviolant).

Soit encore un système élastique soumis aux efforts extérieurs F, C donnés et auxiliaires Φ, Π. Ces efforts extérieurs, forces et couples sont toujours supposés passer graduellement de zéro à leurs valeurs finales F, C, Φ, Π. Désignons par f, φ, c, π les valeurs de ces efforts à un instant quelconque de la déformation; et par l_α, l_β, θ_γ, θ_ω les déplacements linéaires projetés et angulaires des points ou section d'application, au même instant. On aura, en vertu du principe de superposition,

$$\begin{aligned}
l_\alpha &= \lambda_{\alpha\alpha} f + \lambda_{\alpha\beta} \varphi + \lambda_{\alpha\gamma} c + \lambda_{\alpha\omega} \pi, \\
l_\beta &= \lambda_{\beta\alpha} f + \lambda_{\beta\beta} \varphi + \lambda_{\beta\gamma} c + \lambda_{\beta\omega} \pi, \\
\theta &= \theta_{\gamma\alpha} f + \theta_{\gamma\beta} \varphi + \theta_{\gamma\gamma} c + \theta_{\gamma\omega} \pi, \\
\theta_\omega &= \theta_{\omega\alpha} f + \theta_{\omega\beta} \varphi + \theta_{\omega\gamma} c + \theta_{\omega\omega} \pi,
\end{aligned}$$

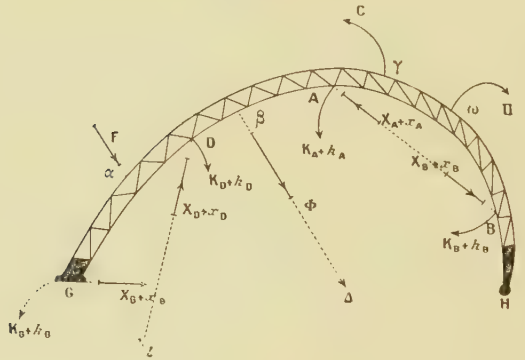
Le travail total des efforts extérieurs pendant la déformation sera

$$\tau = \int f\, dl_\alpha + \varphi\, dl_\beta + c\, d\theta_\gamma + \pi\, d\theta_\omega,$$

ou

$$\begin{aligned}\tau = & \int_0^F \lambda_{\alpha\alpha} f\, df + \int_0^\Phi \lambda_{\beta\beta} \varphi\, d\varphi + \int_0^C \theta_{\gamma\gamma} c\, dc + \int_0^\Pi \theta_{\omega\omega} \pi\, d\pi \\ & + \int_{00}^{\Phi F} (\lambda_{\beta\alpha} \varphi\, df + \lambda_{\alpha\beta} f\, d\varphi) + \int_{00}^{FC} (\lambda_{\alpha\gamma} f\, dc + \theta_{\gamma\alpha} c\, df) \\ & + \int_{00}^{\Pi F} (\lambda_{\alpha\omega} f\, d\pi + \theta_{\omega\alpha} \pi\, df) + \int_{00}^{\Phi C} (\lambda_{\beta\gamma} \varphi\, dc + \theta_{\gamma\beta} c\, d\varphi) \\ & + \int_{00}^{\Phi\Pi} (\lambda_{\beta\omega} \varphi\, d\pi + \theta_{\omega\beta} \pi\, d\varphi) + \int_{00}^{C\Pi} (\theta_{\gamma\omega} c\, d\pi + \theta_{\omega\gamma} \pi\, dc),\end{aligned}$$

Fig. 5.



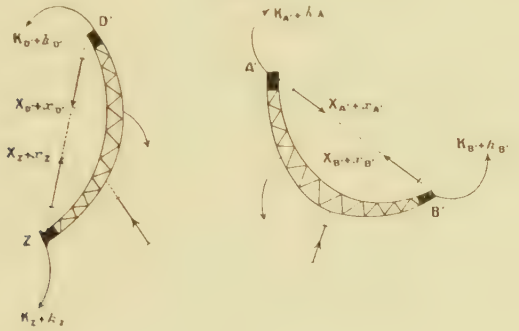
ou encore

$$\begin{aligned}\tau = & \frac{\lambda_{\alpha\alpha}}{2} F^2 + \frac{\lambda_{\beta\beta}}{2} \Phi^2 + \frac{\theta_{\gamma\gamma}}{2} C^2 + \frac{\theta_{\omega\omega}}{2} \Pi^2 + \lambda_{\alpha\gamma} CF + \lambda_{\beta\gamma} \Phi C + \theta_{\gamma\omega} C\Pi \\ & + \lambda_{\beta\alpha} \Phi F + \lambda_{\alpha\omega} F\Pi + \lambda_{\beta\omega} \Phi\Pi + (\lambda_{\alpha\beta} - \lambda_{\beta\alpha}) \int_{00}^{F\Phi} f\, d\varphi \\ & + (\theta_{\gamma\alpha} - \lambda_{\alpha\gamma}) \int_{00}^{CF} c\, df + (\theta_{\omega\alpha} - \lambda_{\alpha\omega}) \int_{00}^{\Pi F} \pi\, df \\ & + (\theta_{\gamma\beta} - \lambda_{\beta\gamma}) \int_{00}^{C\Phi} c\, d\varphi + (\theta_{\omega\beta} - \lambda_{\beta\omega}) \int_{00}^{\Pi\Phi} \pi\, d\varphi \\ & + (\theta_{\omega\gamma} - \theta_{\gamma\omega}) \int_{00}^{\Pi C} \pi\, dc;\end{aligned}$$

Or, le travail de déformation τ du système élastique étant indé-

pendant de la loi suivant laquelle ont progressé les efforts extérieurs f, φ, c, π pour croître de zéro à leurs valeurs finales, il faut que les termes en intégrales ci-dessus soient nuls, ce qui implique nécessairement les relations de réciprocité (5).

Fig. 6.



Donc

$$\tau(F, C, \Phi, \Pi) = \frac{\lambda_{\alpha\alpha}}{2} F^2 + \frac{\theta_{\gamma\gamma}}{2} C^2 + \lambda_{\alpha\gamma} FC + \frac{\lambda_{\beta\beta}}{2} \Phi^2 + \frac{\theta_{\omega\omega}}{2} \Pi^2 + (\lambda_{\beta\alpha} F + \lambda_{\beta\gamma} C)\Phi + (\theta_{\omega\alpha} F + \theta_{\omega\gamma} C)\Pi + \theta_{\omega\beta} \Pi\Phi.$$

Cette relation générale, particularisée aux cas où FC, Φ, Π agissent seuls et séparément sur le système élastique, devient

$$\tau(F, C) = \frac{\lambda_{\alpha\alpha}}{2} F^2 + \frac{\theta_{\gamma\gamma}}{2} C^2 + \lambda_{\alpha\gamma} FC,$$

$$\tau(\Phi) = \frac{\lambda_{\beta\beta}}{2} \Phi^2,$$

$$\tau(\Pi) = \frac{\theta_{\omega\omega}}{2} \Pi^2.$$

Elle peut donc s'écrire

$$\tau(F, C, \Phi, \Pi) = \tau(F, C) + \tau(\Phi) + \tau(\Pi) + (\lambda_{\beta\alpha} F + \lambda_{\beta\gamma} C)\Phi + (\theta_{\omega\alpha} F + \theta_{\omega\gamma} C)\Pi + \theta_{\omega\beta} \Pi\Phi.$$

ou, en introduisant les valeurs de L_β et Θ_ω tirées de (1),

$$(L_\beta - \lambda_{\beta\beta}\Phi)\Phi + (\Theta_\omega - \theta_{\omega\omega}\Pi)\Pi - \lambda_{\beta\omega}\Pi\Phi = \tau(F, C, \Phi, \Pi) - \tau(F, C) - \tau(\Phi) - \tau(\Pi),$$

formule générale qui, particularisée au seul cas des déplacements

linéaires ($\Pi = 0$), s'écrit

$$L_\beta = \lambda_{\beta\beta}\Phi + \frac{1}{\Phi}[\tau(F, C, \Phi) - \tau(F, C) - \tau(\Phi)]$$

et définitivement, puisque Φ en réalité n'existe pas,

$$L_\beta = \frac{1}{\Phi}[\tau(F, C, \Phi) - \tau(F, C) - \tau(\Phi)]. \tag{9}$$

En particularisant de même la formule générale plus haut au seul cas des déplacements angulaires, c'est-à-dire en y faisant $\Phi = 0$, elle s'écrit :

$$\Theta_\omega = \theta_{\omega\omega}\Pi + \frac{1}{\Pi}[\tau(F, C, \Pi) - \tau(F, C) - \tau(\Pi)]$$

et définitivement, puisqu'il n'y a aucun couple réel Π en ω, on a

$$\Theta_\omega = \frac{1}{\Pi}[\tau(F, C, \Pi) - \tau(F, C) - \tau(\Pi)]. \tag{10}$$

Les formules (9) et (10) sont les expressions générales des déplacements linéaires et angulaires en tous les points et sections d'un système élastique quelconque. Elles admettent les cas particuliers :

$$L_\alpha = \frac{1}{\mathfrak{F}}[\tau(F, C, \mathfrak{F}) - \tau(F, C) - \tau(\mathfrak{F})], \tag{9'}$$

et

$$\Theta_\gamma = \frac{1}{\mathfrak{C}}[\tau(F, C, \mathfrak{C}) - \tau(F, C) - \tau(\mathfrak{C})], \tag{10'}$$

déjà signalés plus haut, en désignant par $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{C}$ les force et couple auxiliaire Φ et Π qui ici coïncident avec F et C.

Les relations générales (9) et (10) peuvent d'ailleurs être obtenues en partant des résultats fournis par le théorème des dérivées du travail. En effet, on a directement :

$$\begin{aligned}
L_\beta &= \lambda_{\beta\alpha}F + \lambda_{\beta\beta}\Phi + \lambda_{\beta\gamma}C \\
&= \lambda_{\beta\beta}\Phi + \frac{1}{\Phi}\left[(\lambda_{\beta\alpha}F + \lambda_{\beta\gamma}C)\frac{\Phi}{2} + (\lambda_{\beta\alpha}F + \lambda_{\beta\gamma}C + \lambda_{\beta\beta}\Phi)\frac{\Phi}{2} - \lambda_{\beta\beta}\frac{\Phi^2}{2}\right] \\
&= \lambda_{\beta\beta}\Phi + \frac{1}{\Phi}\left[\frac{F}{2}(\lambda_{\alpha\alpha}F + \lambda_{\alpha\gamma}C + \lambda_{\beta\alpha}\Phi) + \frac{C}{2}(\lambda_{\alpha\gamma}F + \theta_{\gamma\gamma}C + \lambda_{\beta\gamma}\Phi)\right. \\
&\qquad + \frac{\Phi}{2}(\lambda_{\beta\alpha}F + \lambda_{\beta\gamma}C + \lambda_{\beta\beta}\Phi) - \frac{F}{2}(\lambda_{\alpha\alpha}F + \lambda_{\alpha\gamma}C) \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{C}{2}(\lambda_{\alpha\gamma}F + \theta_{\gamma\gamma}C) - \frac{\Phi}{2}\lambda_{\beta\beta}\Phi\right],
\end{aligned}$$

ou, en vertu du théorème des dérivées du travail, et des relations de réciprocité :

$$L_\beta = \lambda_{\beta\beta}\Phi + \frac{1}{\Phi}\left[\frac{F}{2}\frac{\partial\tau}{\partial F}(F, C, \Phi) + \frac{C}{2}\frac{\partial\tau}{\partial C}(F, C, \Phi) + \frac{\Phi}{2}\frac{\partial\tau}{\partial\Phi}(F, C, \Phi) - \frac{F}{2}\frac{\partial\tau}{\partial F}(F, C) - \frac{C}{2}\frac{\partial\tau}{\partial C}(F, C) - \frac{\Phi}{2}\frac{\partial\tau}{\partial\Phi}(\Phi)\right],$$

et enfin d'après le théorème d'Euler sur les formes quadratiques homogènes $\tau(F, C, \Phi)$, $\tau(F, C)$, $\tau(\Phi)$, on a

$$L_\beta = \lambda_{\beta\beta}\Phi + \frac{1}{\Phi}[\tau(F, C, \Phi) - \tau(F, C) - \tau(\Phi)].$$

Remarque analogue pour la relation Θ_ω des déplacements angulaires.

Nous allons maintenant exprimer les travaux de déformation en fonction des éléments statiques, moment fléchissant, effort normal, effort tranchant en tout point du système élastique étudié. Nous donnerons ainsi aux relations générales (7) et (9) ou (8) et (10) des formes identiques remarquables que nous appellerons *premières formules de M. B. de Fontviolant*. Nous avons tout d'abord

$$\tau(F, C, \Phi) = \frac{1}{2}\sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{\mathfrak{M}'^2}{EI} + \frac{\mathfrak{N}'^2}{E\Omega} + \frac{\mathfrak{T}'^2}{G\Omega}\right) ds,$$

en désignant par $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{T}'$ les éléments statiques relatifs à l'action de l'ensemble des efforts extérieurs F, C, Φ.

D'où

$$L_\beta = \frac{\partial\tau(F, C, \Phi)}{\partial\Phi} = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{\mathfrak{M}'}{EI}\frac{\partial\mathfrak{M}'}{\partial\Phi} + \frac{\mathfrak{N}'}{E\Omega}\frac{\partial\mathfrak{N}'}{\partial\Phi} + \frac{\mathfrak{T}'}{G\Omega}\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial\Phi}\right) ds;$$

mais on a

$$\mathfrak{M}' = M + m', \qquad \mathfrak{N}' = N + n', \qquad \mathfrak{T}' = T + t',$$

en appelant M N T, m' n' t' les éléments statiques correspondant à l'action sur le système élastique des efforts F, C donnés d'une part, et Φ auxiliaire d'autre part. D'où

$$\frac{\partial\mathfrak{M}'}{\partial\Phi} = \frac{\partial m'}{\partial\Phi}, \qquad \frac{\partial\mathfrak{N}'}{\partial\Phi} = \frac{\partial n'}{\partial\Phi}, \qquad \frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial\Phi} = \frac{\partial t'}{\partial\Phi},$$

puisque M, N, T sont indépendants de Φ. De plus, m', n', t' étant

des fonctions linéaires de Φ, on a

$$\frac{m'}{\Phi} = \frac{\partial m'}{\partial \Phi}, \qquad \frac{n'}{\Phi} = \frac{\partial n'}{\Phi}, \qquad \frac{t'}{\Phi} = \frac{\partial t'}{\partial \Phi},$$

et ainsi on peut écrire

$$L_\beta = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{M + \Phi \frac{\partial m'}{\partial \Phi}}{EI} \frac{\partial m'}{\partial \Phi} + \frac{N + \Phi \frac{\partial n'}{\partial \Phi}}{E\Omega} \frac{\partial n'}{\partial \Phi} + \frac{T + \Phi \frac{\partial t'}{\partial \Phi}}{G\Omega} \frac{\partial t'}{\partial \Phi} \right) ds.$$

mais en réalité on doit faire $\Phi = 0$, puisqu'il n'y a effectivement aucune force Φ en β ; donc

$$L_\beta = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial m'}{\partial \Phi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\partial n'}{\partial \Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\partial t'}{\partial \Phi} \right) ds,$$

et définitivement

$$L_\beta = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m'}{\Phi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n'}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t'}{\Phi} \right) ds. \tag{11}$$

On peut d'ailleurs établir cette formule en partant de la relation (9), on a en effet

$$L_\beta = \frac{1}{\Phi} [\tau(F, C, \Phi) - \tau(F, C) - \tau(\Phi)];$$

or

$$\tau(F, C, \Phi) = \sum_1^Q \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{(M + m')^2}{EI} + \frac{(N + n')^2}{E\Omega} + \frac{(T + t')^2}{G\Omega} \right] ds,$$

$$\tau(F, C) = \sum_1^Q \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} \right) ds,$$

$$\tau(\Phi) = \sum_1^Q \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{m'^2}{EI} + \frac{n'^2}{E\Omega} + \frac{t'^2}{G\Omega} \right) ds,$$

et ainsi après substitution et calculs, on trouve le déplacement linéaire L_β sous la même forme que plus haut. Semblablement, on a

$$\Theta_\omega = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{\mathfrak{M}''}{EI} \frac{\partial \mathfrak{M}''}{\partial \Pi} + \frac{\mathfrak{N}''}{E\Omega} \frac{\partial \mathfrak{N}''}{\partial \Pi} + \frac{\mathfrak{T}''}{G\Omega} \frac{\partial \mathfrak{T}''}{\partial \Pi} \right) ds$$

$\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{E}''$ éléments statiques relatifs à l'action d'ensemble de F, C, II, ou

$$\theta_\omega = \frac{1}{\Pi}[\tau(F, C, \Pi) - \tau(F, C) - \tau(\Pi)],$$

et définitivement après développements des deux relations ci-dessus, on aura la seule expression :

$$\theta_\omega = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{M}{EI}\frac{\mu'}{\Pi} + \frac{N}{E\Omega}\frac{\nu'}{\Pi} + \frac{T}{G\Omega}\frac{\varepsilon'}{\Pi}\right) ds, \tag{12}$$

μ', ν', ε' désignant les éléments statiques provoqués en toute section du système par l'action du couple auxiliaire Π.

Les relations particulières (7′) et (8′) ou (9′) et (10′) p ennent de même les formes ci-après, dans lesquelles $m'n't'$, $\mu'\nu'\varepsilon'$, se rapportent à l'action, sur le système élastique, de la force F et du couple C donnés, savoir :

$$L_\alpha = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{M}{EI}\frac{m'}{F} + \frac{N}{E\Omega}\frac{n'}{F} + \frac{T}{G\Omega}\frac{t'}{F}\right) ds, \tag{11'}$$

$$\theta_\gamma = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{M}{EI}\frac{\mu'}{C} + \frac{N}{E\Omega}\frac{\nu'}{C} + \frac{T}{G\Omega}\frac{\varepsilon'}{C}\right) ds. \tag{12'}$$

Les trois formules générales (7), (9), (11) des déplacements linéaires dans un système élastique sont équivalentes ; la dernière est la traduction en fonction des éléments statiques, des deux premières exprimées en fonction du travail de déformation. De même les trois formules (8), (10), (12) des déplacements angulaires sont équivalentes et la dernière est exprimée en fonction des éléments statiques.

Ceci posé, on conçoit qu'on puisse décomposer le système élastique total en plusieurs systèmes partiels isostatiques, c'est-à-dire statiquement déterminés (*fig.* 5 et 6). A cet effet, on introduit de système à système des efforts de liaisons surabondantes forces et couples. Soit l'un de ces systèmes isostatiques composé de P poutres : nous l'appellerons *système principal*. Nous allons démontrer que le déplacement linéaire d'un point quelconque

de ce système principal est donné par

$$L_\beta = \sum_1^P \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{\Phi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{\Phi} \right) ds,$$

m, n, t se rapportant à l'action de la force Φ auxiliaire sur le système principal, débarrassé préalablement de ses liaisons hyperstatiques intérieures et extérieures.

Ramener à l'état isostatique un système en liaison avec d'autres systèmes surabondants est possible en général de plusieurs manières, mais cela est indifférent pour la question qui nous occupe.

Supposons d'abord que le système principal GDABH soit en liaison avec un seul système surabondant, plus généralement intérieur à ce système principal, AB par exemple comportant (Q — P) poutres. Nous aurons, d'après la formule (11) établie plus haut,

$$L_\beta = \sum_1^P \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m'}{\Phi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n'}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t'}{\Phi} \right) ds + \sum_{P+1}^Q \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m''}{\Phi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n''}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t''}{\Phi} \right) ds,$$

les éléments statiques $m' n' t'$, $m'' n'' t''$ se rapportant à l'action de Φ sur le système principal et le système surabondant, formant le système élastique d'ensemble.

Ramenons le système principal à l'état isostatique (*fig.* 5 et 6) par adjonction de forces et couples de liaisons X, K et x, k, système à système, correspondant à l'action des efforts FC d'une part et Φ d'autre part sur le système total proposé.

Désignons par $m n t$, $m_{x_A} n_{x_A} t_{x_A}$, $m_{x_B} n_{x_B} t_{x_B}$, $m_{k_A} n_{k_A} t_{k_A}$, $m_{k_B} n_{k_B} t_{k_B}$, les éléments statiques provoqués en tout point du système principal isostatique par l'action respective des efforts Φ, x_A, x_B, k_A, k_B. Représentons de même par $m_{x_{A'}} n_{x_{A'}} t_{x_{A'}}$, $m_{x_{B'}} n_{x_{B'}}$, $t_{x_{B'}} m_{k_{A'}}$, $n_{k_{A'}} t_{k_{A'}}$, $m_{k_{B'}} n_{k_{B'}} t_{k_{B'}}$ les éléments statiques relatifs à l'action de Φ, c'est-à-dire relatifs à l'action de $x_{A'}$, $x_{B'}$, $k_{A'}$, $k_{B'}$ sur le système surabondant. Nous aurons :

$$m' = m + m_{x_A} + m_{x_B} + m_{k_A} + m_{k_B},$$
$$n' = n + n_{x_A} + n_{x_B} + n_{k_A} + n_{k_B},$$
$$t' = t + t_{x_A} + t_{x_B} + t_{k_A} + t_{k_B},$$

et de même :

$$m'' = m_{x\mathrm{A}'} + m_{x\mathrm{B}'} + m_{k\mathrm{A}'} + m_{k\mathrm{B}'},$$
$$n'' = n_{x\mathrm{A}'} + n_{x\mathrm{B}'} + n_{k\mathrm{A}'} + n_{k\mathrm{B}'},$$
$$t'' = t_{x\mathrm{A}'} + t_{x\mathrm{B}'} + t_{k\mathrm{A}'} + t_{k\mathrm{B}'}.$$

Quant aux M, N, T ils correspondent indifféremment à l'action des efforts FC donnés sur le système d'ensemble, système principal et système surabondant, ou à l'action des efforts FC donnés et de liaisons hyperstatiques XK, sur le système principal et le système surabondant rendus tous deux isostatiques.

Si donc on substitue les expressions ci-dessus de $m'n't'$ et $m''n''t''$ dans la relation des déplacements linéaires plus haut, on aura, en remarquant que

$$x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}'}, \qquad x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{B}'}, \qquad k_{\mathrm{A}} = k_{\mathrm{A}'}, \qquad k_{\mathrm{B}} = k_{\mathrm{B}'},$$

et après calculs :

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_\beta = & \sum_1^{\mathrm{P}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \frac{m}{\Phi} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} \frac{n}{\Phi} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} \frac{t}{\Phi} \right) ds \\
& - \frac{x_{\mathrm{A}}}{\Phi} \left[\sum_1^{\mathrm{P}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \frac{m_{x\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{A}}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} \frac{n_{x\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{A}}} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} \frac{t_{x\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{A}}} \right) ds \right. \\
& \qquad \left. + \sum_{\mathrm{P}+1}^{\mathrm{Q}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \frac{m_{x\mathrm{A}'}}{x_{\mathrm{A}'}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} \frac{n_{x\mathrm{A}'}}{x_{\mathrm{A}'}} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} \frac{t_{x\mathrm{A}'}}{x_{\mathrm{A}'}} \right) ds \right] \\
& + \frac{x_{\mathrm{B}}}{\Phi} \left[\sum_1^{\mathrm{P}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \frac{m_{x\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{B}}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} \frac{n_{x\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{B}}} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} \frac{t_{x\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{B}}} \right) ds \right. \\
& \qquad \left. + \sum_{\mathrm{P}+1}^{\mathrm{Q}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \frac{m_{x\mathrm{B}'}}{x_{\mathrm{B}'}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} \frac{n_{x\mathrm{B}'}}{x_{\mathrm{B}'}} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} \frac{t_{x\mathrm{B}'}}{x_{\mathrm{B}'}} \right) ds \right] \\
& + \frac{k_{\mathrm{A}}}{\Phi} \left[\sum_1^{\mathrm{P}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \frac{m_{k\mathrm{A}}}{k_{\mathrm{A}}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} \frac{n_{k\mathrm{A}}}{k_{\mathrm{A}}} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} \frac{t_{k\mathrm{A}}}{k_{\mathrm{A}}} \right) ds \right. \\
& \qquad \left. + \sum_{\mathrm{P}+1}^{\mathrm{Q}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \frac{m_{k\mathrm{A}'}}{k_{\mathrm{A}'}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} \frac{n_{k\mathrm{A}'}}{k_{\mathrm{A}'}} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} \frac{t_{k\mathrm{A}'}}{k_{\mathrm{A}'}} \right) ds \right] \\
& + \frac{k_{\mathrm{B}}}{\Phi} \left[\sum_1^{\mathrm{P}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \frac{m_{k\mathrm{B}}}{k_{\mathrm{B}}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} \frac{n_{k\mathrm{B}}}{k_{\mathrm{B}}} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} \frac{t_{k\mathrm{B}}}{k_{\mathrm{B}}} \right) ds \right. \\
& \qquad \left. + \sum_{\mathrm{P}+1}^{\mathrm{Q}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \frac{m_{k\mathrm{B}'}}{k_{\mathrm{B}'}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} \frac{n_{k\mathrm{B}'}}{k_{\mathrm{B}'}} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} \frac{t_{k\mathrm{B}'}}{k_{\mathrm{B}'}} \right) ds \right].
\end{aligned}$$

Or la somme des deux intégrales figurant dans les termes de coefficient $\frac{x_A}{\Phi}$ ou $\frac{x_B}{\Phi}$ est nulle comme représentant la somme des déplacements linéaires, en projection sur x_A et $x_{A'}$ ou x_B et $x_{B'}$ des points A et A′ ou B et B′ constamment en contact pendant la déformation, déplacements provoqués par l'ensemble des efforts F, C, X, K agissant sur le système principal et le système surabondant.

De même, la somme des deux intégrales figurant dans les termes de coefficient $\frac{k_A}{\Phi}$ ou $\frac{k_B}{\Phi}$ est nulle, puisqu'elle représente la somme des rotations des deux sections contiguës A et A′ ou B et B′, déplacements angulaires provoqués comme plus haut par l'ensemble des efforts extérieurs.

D'autre part, si le système surabondant DZ est extérieur au système principal, ces sommes d'intégrales se réduisent à celles en $\frac{x_D}{\Phi}$ et $\frac{k_D}{\Phi}$, nulles pour les mêmes raisons que ci-dessus.

Enfin si les liaisons surabondantes XK, xk proviennent d'un appui rigide G, on aura

$$L_\beta = \sum_1^P \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{\Phi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{\Phi} \right) ds$$

$$+ \frac{x_G}{\Phi} \sum_1^P \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m_{xG}}{x_G} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n_{xG}}{x_G} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t_{xG}}{x_G} \right) ds$$

$$+ \frac{k_G}{\Phi} \sum_1^P \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m_{kG}}{k_G} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n_{kG}}{k_G} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t_{kG}}{k_G} \right) ds.$$

Ces dernières intégrales sont nulles. La première, en effet, représente le déplacement du point d'application G de la liaison surabondante x_G en projection sur cette force ; or, s'il s'agit d'un appui à dilatation, le déplacement du point G est normal à x_G ; s'il s'agit d'un appui à rotule, le déplacement de ce point est nul en toutes directions. La seconde intégrale en $\frac{k_G}{\Phi}$ exprime la rotation subie par la section d'encastrement G, rotation qui est effectivement nulle ; ces déplacements linéaires et angulaires étant provoqués par l'ensemble des efforts extérieurs F, C, X, K.

Les raisonnements que nous venons de faire ci-dessus s'étendent

à un nombre quelconque de systèmes surabondants, en liaison avec le système principal.

Ainsi dans tous les cas de liaisons hyperstatiques intérieures ou extérieures, correspondant à des appuis élastiques ou non, il vient définitivement

$$L_\beta = \sum_1^P \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{\Phi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{\Phi} \right) ds, \tag{13}$$

c'est-à-dire

$$L_\beta = \frac{\partial \tau_P}{\partial \Phi} (F, C, X, K, \Phi) \tag{14}$$

et

$$L_\beta = \frac{1}{\Phi} [\tau_P(F, C, X, K, \Phi) - \tau_P(F, C, X, K) - \tau_P(\Phi)]. \tag{15}$$

En suivant une méthode analogue, on démontrerait que les déplacements angulaires en toute section du système principal sont donnés par

$$\theta_\omega = \sum_1^P \int \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{\Pi} - \frac{N}{E\Omega} \frac{\varepsilon}{\Pi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{\Pi} \right) ds, \tag{16}$$

c'est-à-dire

$$\theta_\omega = \frac{\partial \tau_P}{\partial \Pi} (F, C, X, K, \Pi) \tag{17}$$

et

$$\theta_\omega = \frac{1}{\Pi} [\tau_P(F, C, X, K, \Pi) - \tau_P(F, C, X, K) - \tau_P(\Pi)]. \tag{18}$$

Les trois relations (13), (14), (15) sont équivalentes et équivalentes aux trois relations (7), (9), (11).

De même, les relations (16), (17), (18) sont équivalentes entre elles et équivalentes aux formules (8), (10), (12).

Dans le cas particulier connu où l'on cherche le déplacement linéaire projeté du point d'application d'une force donnée F, on a :

$$L_\alpha = \sum_1^P \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{F} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{F} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{F} \right) ds \tag{13'}$$

ou

$$L_\alpha = \frac{\partial \tau_P}{\partial F} (F, C, X, K) \tag{14'}$$

ou

$$L_\alpha = \frac{1}{F} [\tau_P(F, C, X, K, F) - \tau_P(F, C, X, K) - \tau_P(F)]. \tag{15'}$$

Enfin, la rotation d'une section soumise à l'action directe d'un couple C donné est fournie par les relations :

$$\theta_\gamma = \sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{C} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{C} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{C} \right) ds \tag{16'}$$

ou

$$\theta_\gamma = \frac{\partial \tau_P}{\partial C}(F, C, X, K) \tag{17'}$$

ou

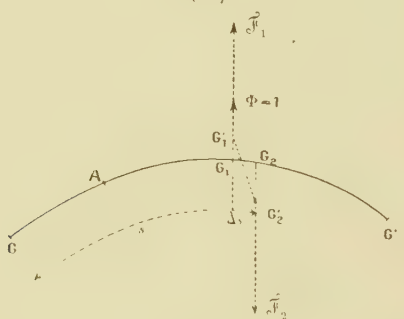
$$\theta_\gamma = \frac{1}{\Im} [\tau_P(F, C, X, K, \Im) - \tau_P(F, C, X, K) - \tau_P(\Im)]. \tag{18'}$$

Les relations générales (13) et (16) des déplacements élastiques linéaires et angulaires sont appelées *secondes formules de M. B. de Fontviolant*. Dans ces relations MNT, *mnt*, μνε se rapportent aux actions respectives des efforts extérieurs F, C, X, K, de la force Φ, du couple auxiliaire Π, sur le système principal ramené à l'origine à l'état complètement isostatique.

Ces formules générales sont au fond identiques. Cela est immédiat, si l'on remarque avec M. de Fontviolant qu'un couple auxiliaire Π peut être considéré comme une force Φ infiniment petite agissant suivant la droite de l'infini du plan de ce couple. Nous allons d'ailleurs montrer que la formule (16) est immédiate si l'on admet la relation (13).

En effet (*fig.* 7), appelons $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les deux forces composant le

Fig. 7.



couple Π de bras de levier Δs : on aura $\mathcal{F}_1 \Delta s = \mathcal{F}_2 \Delta s = \Pi$. Soient $m_1 n_1 t_1$, $m_2 n_2 t_2$ les éléments statiques correspondant à l'action

séparée des forces $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$; on écrira

$$\mu = m_1 + m_2, \qquad \nu = n_1 + n_2, \qquad \varepsilon = t_1 + t_2.$$

en désignant par $\mu\nu\varepsilon$, les éléments statiques provoqués par le couple II auxiliaire agissant sur la section G_1.

La somme des déplacements linéaires des points G_1 et G_2 en projection sur $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est, d'après (13),

$$\overline{GG'_1} + \overline{G_2G'_2} = \sum_1^p \int_0^l \left[\frac{(M + m_1 + m_2)}{EI} \left(\frac{m_1}{\mathcal{F}_1} + \frac{m_2}{\mathcal{F}_2} \right) - \frac{(N + n_1 + n_2)}{E\Omega} \left(\frac{n_1}{\mathcal{F}_1} + \frac{n_2}{\mathcal{F}_2} \right) + \frac{(T + t_1 + t_2)}{G\Omega} \left(\frac{t_1}{\mathcal{F}_1} + \frac{t_2}{\mathcal{F}_2} \right) \right] ds$$

ou puisque $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$

$$= \sum_1^p \int_0^l \left[\frac{M}{EI} \frac{(m_1 + m_2)}{\mathcal{F}_1} - \frac{N}{E\Omega} \frac{(n_1 + n_2)}{\mathcal{F}_1} + \frac{T}{G\Omega} \frac{(t_1 + t_2)}{\mathcal{F}_1} \right] ds$$

$$- \sum_1^p \int_0^l \left[\frac{m_1 - m_2}{EI\mathcal{F}_1} - \frac{(n_1 - n_2)^2}{E\Omega\mathcal{F}_1} + \frac{(t_1 - t_2)^2}{G\Omega\mathcal{F}_1} \right] ds$$

$$= \Delta s \sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{II} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{II} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{II} \right) ds = \Delta s \frac{2}{II} \tau_p(II),$$

en représentant par $\tau_p(II)$ le travail de déformation produit par le couple II dans le système principal. Ce travail est nul puisque II n'existe pas en réalité. On a donc

$$\lim \frac{\overline{G_1G'_1} + \overline{G_2G_2}}{\Delta s} = \omega_{G_1} = \sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{II} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{II} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{II} \right) ds.$$

formule (16) des déplacements angulaires qui est ainsi une conséquence de la formule (13) des déplacements linéaires.

On peut encore se rendre compte de ce fait en s'appuyant sur un principe énoncé par M. Hisely (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 11 novembre 1912, t. 155, p. 953). Pour la question qui nous occupe, ce principe peut être énoncé comme suit.

L'effet d'un couple unité est la dérivée de l'effet analogue produit par une force unité. Il faut entendre par *effet* un déplacement linéaire, ou une force de liaison, ou un moment, et la dérivée doit être prise par rapport à l'abscisse s de la ligne moyenne de la poutre. Nous démontrerons ce principe de la façon suivante.

Soit E (s) un effet produit en un point A par une force $\Phi = 1$, appliquée en G_1 point d'abscisse s (*fig.* 7). Prenons un point voisin G_2 d'abscisse $s + \Delta s$ et deux forces $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ appliquées en G_1, G_2 formant un couple de grandeur Π. Chacune des forces du couple a pour valeur $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \frac{\Pi}{\Delta s}$. D'après le principe de superposition, la somme des effets de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ au point A sera

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2\,\mathrm{E}(s+\Delta s) - \mathcal{F}_1\,\mathrm{E}(s) &= \mathcal{F}_2[\mathrm{E}(s+\Delta s) - \mathrm{E}(s)] \\ &= \frac{\Pi}{\Delta s}[\mathrm{E}(s+\Delta s) - \mathrm{E}(s)] = \Pi\frac{d\,\mathrm{E}(s)}{ds},\end{aligned}$$

à la limite. Or, si l'on suppose $\Pi = 1$, on voit que l'effet du couple $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$ de moment $\Pi = 1$ est dérivée de l'effet produit par la force $\Phi = 1$ appliquée en G_1.

Ceci posé, la formule (13) des déplacements linéaires s'écrit :

$$\mathrm{L}_{G_1} = \sum_1^{\mathrm{P}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\,\frac{m_1}{1} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega}\,\frac{n_1}{1} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega}\,\frac{t_1}{1}\right) ds$$

en désignant ici par m_1, n_1, t_1 les éléments statiques correspondants à l'action de la force auxiliaire $\Phi = 1$ agissant en G_1. Appelons μ_1, ν_1, ε_1 les éléments similaires provoqués par un couple auxiliaire $\Pi = 1$ agissant sur la section G_1, et prenons la dérivée des deux membres de la relation ci-dessus. On aura d'abord :

$$\frac{d\mathrm{L}_{G_1}}{ds} = \lim \frac{\overline{G_1 G_1'} + \overline{G_2 G_2'}}{\Delta s} = \theta_{G_1}.$$

De plus, dans le second membre, les quantités variables avec le point G_1 sont m_1, n_1, t_1 : ce sont les effets d'une force $\Phi = 1$ et leurs dérivées seront les effets d'un couple $\Pi = 1$, supposé agir dans la section considérée G_1. Donc, dans la dérivée du second membre, les m_1, n_1, t_1 deviennent μ_1, ν_1, ε_1. On a ainsi :

$$\frac{d\mathrm{L}_{G_1}}{ds} = \theta_{G_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\mathrm{L}_{G_1}}{ds} = \sum_1^{\mathrm{P}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\,\frac{\mu_1}{1} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega}\,\frac{\nu_1}{1} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega}\,\frac{\varepsilon_1}{1}\right) ds,$$

c'est-à-dire

$$\theta_{G_1} = \sum_1^{\mathrm{P}} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\,\frac{\mu_1}{1} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega}\,\frac{\nu_1}{1} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega}\,\frac{\varepsilon_1}{1}\right) ds,$$

et comme

$$\frac{\mu_1}{1} = \frac{\mu}{\Pi}, \qquad \frac{\nu_1}{1} = \frac{\nu}{\Pi}, \qquad \frac{\varepsilon_1}{1} = \frac{\varepsilon}{\Pi},$$

il vient définitivement :

$$\theta_{G_1} = \sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{\Pi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{\Pi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{\Pi} \right) ds,$$

formule (16) ci-dessus. Ainsi les relations (13) et (16), c'est-à-dire (14) et (17), ou (15) et (18), et de même (7) et (9), ou (8) et (10), ou (11) et (12) ne forment deux à deux qu'une même formule.

Nous retiendrons définitivement les formes (13) et (16) de M. B. de Fontviolant, qui expriment les déplacements linéaires et angulaires en fonction des éléments statiques en tous les points d'un système élastique rendu isostatique, avant l'adjonction des efforts auxiliaires Φ, Π.

Dans le cas où le système principal est une poutre pleine à liaisons hyperstatiques intérieures et extérieures provenant d'appuis rigides ou élastiques, on a simplement

$$L_\beta = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{\Phi} - \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{\Phi} \right) ds,$$

$$\theta_\omega = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{\Pi} - \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{\Pi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{\Pi} \right) ds,$$

$$L_\alpha = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{F} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{F} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{F} \right) ds,$$

$$\theta_\gamma = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{C} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{C} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{C} \right) ds.$$

Dans le cas d'un système articulé à liaisons surabondantes intérieures ou extérieures, on définit comme système principal un système articulé à p barres rectilignes complètement isostatique. On a ainsi, en supposant l'action d'efforts extérieurs, forces et couples, agissant aux nœuds et dehors des nœuds,

$$L_\beta = \sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{\Phi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{\Phi} \right) ds,$$

$$\theta_\omega = \sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{\Pi} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{\Pi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{\Pi} \right) ds,$$

$$L_\alpha = \sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{F} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{F} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{F} \right) ds,$$

$$\theta_\gamma = \sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{C} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{C} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{C} \right) ds.$$

D'autre part, si le point β' ou α' est un nœud du système articulé soumis à une force auxiliaire Φ ou réelle F, la rotation devient sans intérêt et de plus $m = 0$, $t = 0$ et n est constant pour chaque barre; on a donc

$$L_{\beta'} = \sum_{1}^{p} \frac{1}{E\Omega} \frac{n}{\Phi} \int_0^l N \, ds$$

et

$$L_{\alpha'} = \sum_{1}^{p} \frac{1}{E\Omega} \frac{n}{F} \int_0^l N \, ds.$$

Enfin, si le système articulé est soumis à l'action de charges exclusivement appliquées aux nœuds, les éléments statiques M et T sont nuls et N est constant pour une même barre du système articulé. On a donc pour les déplacements élastiques, les expressions suivantes :

$$L_\beta = \sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \int_0^l \frac{n}{\Phi} ds, \qquad \Theta_\omega = \sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \int_0^l \frac{\nu}{\Pi} ds, \qquad L_\alpha = \sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \int_0^l \frac{n}{F} ds,$$

$$\Theta_\gamma = \sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \int_0^l \frac{\nu}{C} ds, \qquad L_{\beta'} = \sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{\Phi} l, \qquad L_{\alpha'} = \sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{F} l.$$

C. Quelle que soit l'expression choisie pour calculer les déplacements linéaires et angulaires, dans un système élastique quelconque, on remarquera qu'il y a lieu de connaître auparavant les efforts de liaisons surabondantes X et K, forces et couples, fonction des efforts extérieurs donnés F, C, qui unissent entre eux les différents systèmes isostatiques (dont le système principal) formant le système élastique total.

Nous ferons pour cela appel au *théorème du travail minimum* de Castigliano, théorème qui est un corollaire du théorème des dérivées du travail.

Appelons τ, τ_P, τ_S les travaux de déformation du système total, du système principal et des systèmes restants.

On peut écrire

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial X_A} + \frac{\partial \tau_S}{\partial X_A} = 0,$$

puisque le premier membre de cette expression, d'après la

relation (14′) représente la somme des déplacements des points A et A′ constamment en contact, respectivement en projection sur X_A et $X_{A'}$, déplacements provoqués par l'ensemble des efforts extérieurs F, C, X, K. De même

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial X_B} + \frac{\partial \tau_S}{\partial X_{B'}} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_P}{\partial X_D} + \frac{\partial \tau_S}{\partial X_{D'}} = 0$$

Semblablement,

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial K_A} + \frac{\partial \tau_S}{\partial K_{A'}} = 0,$$

puisque le premier membre de cette expression, d'après la relation (17′), représente la somme des déplacements angulaires des deux sections A et A′ toujours contiguës pendant la déformation, déplacements corrélatifs à l'action des efforts extérieurs. De même

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial K_B} + \frac{\partial \tau_S}{\partial K_{B'}} = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \tau_P}{\partial K_D} + \frac{\partial \tau_S}{\partial K_{D'}} = 0.$$

Enfin, si les liaisons surabondantes X et K proviennent d'un appui rigide G, on a évidemment

$$\frac{\partial \tau_S}{\partial X_G} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_S}{\partial K_G} = 0$$

et de plus

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial X_G} = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \tau_P}{\partial K_G} = 0.$$

En effet, s'il s'agit d'un appui-plan, le déplacement du point G est normal à la force X_G et ainsi le déplacement projeté $\frac{\partial \tau_P}{\partial X_G}$ de ce point sur X_G est nul. S'il s'agit d'un appui à rotule, le déplacement du point G est nul en tous sens et $\frac{\partial \tau_P}{\partial X_G} = 0$. De même, la rotation $\frac{\partial \tau_P}{\partial K_G}$ d'une section d'encastrement G est effectivement nulle.

Ainsi, dans tous les cas de liaisons surabondantes intérieures ou extérieures, élastiques ou non, on a

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial X} + \frac{\partial \tau_S}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_P}{\partial K} + \frac{\partial \tau_S}{\partial K} = 0.$$

D'autre part, les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 \tau_P}{\partial X^2}, \qquad \frac{\partial^2 \tau_P}{\partial K^2}, \qquad \frac{\partial^2 \tau_S}{\partial X^2}, \qquad \frac{\partial^2 \tau_S}{\partial K^2}$$

sont essentiellement positives. En effet, par exemple, on a

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial X_A} = L_A,$$

déplacement du point A en projection sur X_A et

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial K_B} = \Theta_B,$$

déplacement angulaire de la section B. Donc

$$\frac{\partial^2 \tau_P}{\partial X_A^2} = \frac{\partial L_A}{\partial X_A}, \qquad \frac{\partial^2 \tau_P}{\partial K_B^2} = \frac{\partial \Theta_B}{\partial K_B},$$

or les seconds membres $\frac{\partial L_A}{\partial X_A}$ et $\frac{\partial \Theta_B}{\partial K_B}$ sont nécessairement positifs, car l'accroissement d'une force ou d'un couple unique et l'accroissement corrélatif du déplacement linéaire ou angulaire du point ou section d'application correspondants, sont tous deux de même sens. Ainsi donc les sommes

$$\frac{\partial^2 \tau_P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tau_S}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial X^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \tau_P}{\partial K^2} + \frac{\partial^2 \tau_S}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial K^2}$$

sont essentiellement positives, comme formées de deux parties positives. On a en même temps les relations établies plus haut

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial X} + \frac{\partial \tau_S}{\partial X} = \frac{\partial \tau}{\partial X} = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \tau_P}{\partial K} + \frac{\partial \tau_S}{\partial K} = \frac{\partial \tau}{\partial K} = 0,$$

et ainsi ces conditions se rapportent à un minimum. D'où le théorème du travail minimum de Castigliano :

Les forces et couples de liaisons surabondantes intérieures et extérieures d'un système élastique quelconque sont tels que le travail total de déformation du système est un minimum.

Les relations ci-dessus, qui expriment cette condition servent à déterminer ces efforts de liaisons hyperstatiques. Nous les écrirons, sous les formes explicites :

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial X}(F, C, X, K) + \frac{\partial \tau_S}{\partial X}(F, C, X, K) = 0, \tag{19}$$

et

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial K}(F, C, X, K) + \frac{\partial \tau_S}{\partial K}(F, C, X, K) = 0, \tag{20}$$

équations dont le nombre total égale celui des liaisons surabondantes, système à système, dans le système élastique total et auxquelles correspondent les relations particulières (cas d'appuis surabondants rigides)

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial X}(F, C, X, K) = 0 \tag{19'}$$

et

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial K}(F, C, X, K) = 0. \tag{20'}$$

Si l'on fait appel aux relations (15') et (18') pour exprimer les déplacements élastiques des points et sections en contact A et A', B et B', D et D', où agissent les forces et couples de liaison X et K, les équations (19) et (20) prennent les formes

$$\frac{1}{\mathfrak{X}}[\tau_P(F, C, X, K, \mathfrak{X}) - \tau_P(F, C, X, K) - \tau_P(\mathfrak{X})] + \frac{1}{\mathfrak{X}}[\tau_S(F, C, X, K, \mathfrak{X}) - \tau_S(F, C, X, K) - \tau_S(\mathfrak{X})] = 0 \tag{21}$$

et

$$\frac{1}{\mathfrak{K}}[\tau_P(F, C, X, K, \mathfrak{K}) - \tau_P(F, C, X, K) - \tau_P(\mathfrak{K})] + \frac{1}{\mathfrak{K}}[\tau_S(F, C, X, K, \mathfrak{K}) - \tau_S(F, C, X, K) - \tau(\mathfrak{K})] = 0, \tag{22}$$

qui se réduisent, dans le cas d'appuis surabondants rigides, à

$$\frac{1}{\mathfrak{X}}[\tau_P(F, C, X, K, \mathfrak{X}) - \tau_P(F, C, X, K) - \tau_P(\mathfrak{X})] = 0 \tag{21'}$$

et

$$\frac{1}{\mathfrak{K}}[\tau_P(F, C, X, K, \mathfrak{K}) - \tau_P(F, C, X, K) - \tau_P(\mathfrak{K})] = 0, \tag{22'}$$

en désignant par $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{K}$ les forces et couples auxiliaires qui ici coïncident avec X et K.

Enfin, si l'on fait appel aux relations (13') et (16') qui expriment les déplacements élastiques en fonction des éléments statiques, les équations aux liaisons surabondantes sont

$$\sum_{1}^{P} \int_0^l \left(\frac{M}{EI}\frac{m}{X} + \frac{N}{E\Omega}\frac{n}{X} + \frac{T}{G\Omega}\frac{t}{X} \right) ds - \sum_{P+1}^{Q} \int_1^l \left(\frac{M}{EI}\frac{m}{X} + \frac{N}{E\Omega}\frac{n}{X} + \frac{T}{G\Omega}\frac{t}{X} \right) ds = 0 \tag{23}$$

et

$$(24)\qquad \sum_{1}^{p}\int_{0}^{l}\left(\frac{M}{EI}\frac{\mu}{K}+\frac{N}{E\Omega}\frac{\nu}{K}+\frac{T}{G\Omega}\frac{\varepsilon}{K}\right)ds + \sum_{p+1}^{0}\int_{0}^{l}\left(\frac{M}{EI}\frac{\mu}{K}+\frac{N}{E\Omega}\frac{\nu}{K}+\frac{T}{G\Omega}\frac{\varepsilon}{K}\right)ds=0,$$

avec les cas particuliers suivants (appuis surabondants rigides) :

$$(23')\qquad \sum_{1}^{p}\int_{0}^{l}\left(\frac{M}{EI}\frac{m}{X}+\frac{N}{E\Omega}\frac{n}{X}+\frac{T}{G\Omega}\frac{t}{X}\right)ds=0,$$

et

$$(24')\qquad \sum_{1}^{p}\int_{0}^{l}\left(\frac{M}{EI}\frac{\mu}{K}+\frac{N}{E\Omega}\frac{\nu}{K}+\frac{T}{G\Omega}\frac{\varepsilon}{K}\right)ds=0.$$

Les équations générales (19), (21), (23) sont équivalentes entre elles et de même les équations (20), (22), (24); nous retiendrons les deux dernières (23) et (24), exprimées en fonction des éléments statiques, et qui sont en nombre égal à celui des liaisons statiquement indéterminées, système à système, dans le système élastique total.

Dans ces conditions, pour une poutre pleine l, réputée système principal et assemblée ou articulée avec d'autres poutres pleines λ, les équations aux liaisons surabondantes sont

$$\int_{0}^{l}\left(\frac{M}{EI}\frac{m}{X}+\frac{N}{E\Omega}\frac{n}{X}+\frac{T}{G\Omega}\frac{t}{X}\right)ds+\int_{0}^{\lambda}\left(\frac{M}{EI}\frac{m}{X}+\frac{N}{E\Omega}\frac{n}{X}+\frac{T}{G\Omega}\frac{t}{X}\right)ds=0$$

et

$$\int_{0}^{l}\left(\frac{M}{EI}\frac{\mu}{K}+\frac{N}{E\Omega}\frac{\nu}{K}+\frac{T}{G\Omega}\frac{\varepsilon}{K}\right)ds+\int_{0}^{\lambda}\left(\frac{M}{EI}\frac{\mu}{K}+\frac{N}{E\Omega}\frac{\nu}{K}+\frac{T}{G\Omega}\frac{\varepsilon}{K}\right)ds=0.$$

Dans le cas où les poutres surabondantes sont des barres supposées articulées avec la poutre principale à la manière de pièces de soutien (entraits, aisselliers), et ne supportant aucun effort extérieur directement appliqué, on a simplement :

$$\int_{0}^{l}\left(\frac{M}{EI}\frac{m}{X}+\frac{N}{E\Omega}\frac{n}{X}+\frac{T}{G\Omega}\frac{t}{X}\right)ds+\frac{X\lambda}{E\Omega}=0.$$

Enfin, si la poutre pleine considérée est à appuis surabondants rigides, on a

$$\int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{X} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{X} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{X} \right) ds = 0$$

et

$$\int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{K} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{K} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{K} \right) ds = 0.$$

Dans le cas d'un système articulé à liaisons hyperstatiques soumis à des efforts extérieurs appliqués aux nœuds ou non, les équations aux liaisons surabondantes deviennent :

$$\sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{X} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{X} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{X} \right) ds$$

$$+ \sum_{p+1}^q \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{X} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{X} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{X} \right) ds = 0$$

et

$$\sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{K} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{K} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{K} \right) ds$$

$$+ \sum_{p+1}^q \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{K} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{K} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{K} \right) ds = 0.$$

D'autre part, si les liaisons surabondantes proviennent de barres rectilignes articulées à la manière de lignes de soutien (entraits et aisselliers) ne supportant pas d'efforts extérieurs directement appliqués, on a simplement

$$\sum_1^p \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{X} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{X} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{X} \right) ds + \frac{X\lambda}{E\Omega} = 0.$$

En particulier, s'il s'agit d'une ligne de soutien intérieure nœud à nœud (barre surabondante) ou d'une ligne de soutien extérieure aboutissant en un nœud du système articulé, ces barres ne supportant aucun effort extérieur, on a

$$\sum_1^p \frac{1}{E\Omega} \frac{n}{X} \int_0^l N\, ds + \frac{X\lambda}{E\Omega} = 0.$$

puisque X agissant en un nœud ne produit ni m ni t, mais n constant dans chaque barre du système principal.

Enfin s'il s'agit de liaisons surabondantes provenant d'appuis surabondants rigides, on a

$$\sum_{1}^{p} \int_{0}^{l} \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{X} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{X} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{X} \right) ds = 0$$

et

$$\sum_{1}^{p} \int_{0}^{l} \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{K} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{K} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{K} \right) ds = 0,$$

ou

$$\sum_{1}^{p} \frac{1}{E\Omega} \frac{n}{X} \int_{0}^{l} N \, ds = 0,$$

si l'appui rigide surabondant correspond à un nœud.

Si le système articulé est soumis à des charges agissant exclusivement aux nœuds, on a

$$M = 0, \qquad T = 0,$$

N constant pour chaque barre et ainsi les équations aux liaisons surabondantes sont :

$$\sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \int_{0}^{l} \frac{n}{X} ds + \sum_{p+1}^{q} \int_{0}^{l} \left(\frac{M}{EI} \frac{m}{X} + \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{X} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{X} \right) ds = 0,$$

$$\sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \int_{0}^{l} \frac{\nu}{K} ds + \sum_{p+1}^{q} \int_{0}^{l} \left(\frac{M}{EI} \frac{\mu}{K} + \frac{N}{E\Omega} \frac{\nu}{K} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{K} \right) ds = 0.$$

Dans le cas de barres de soutien quelconques articulées à leurs extrémités, on a simplement

$$\sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \int_{0}^{l} \frac{n}{X} ds + \frac{X\lambda}{E\Omega} = 0.$$

S'il s'agit d'une barre surabondante nœud à nœud, on a alors

$$\sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \frac{n}{X} l + \frac{X\lambda}{E\Omega} = 0.$$

Enfin, si la liaison surabondante provient d'un appui surabondant rigide, il vient

$$\sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \int_{0}^{l} \frac{n\,ds}{X} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \int_{0}^{l} \frac{v\,ds}{K} = 0$$

ou

$$\sum_{1}^{p} \frac{N}{E\Omega} \frac{nl}{X} = 0,$$

si l'appui rigide surabondant correspond à un nœud.

Remarquons pour terminer que les théorèmes des dérivées du travail de déformation et du travail minimum ont été à l'origine démontrés par Castigliano, pour les systèmes articulés. Cet auteur a généralisé ces théorèmes pour les poutres pleines et les systèmes quelconques, en considérant un solide élastique à la manière d'un système articulé, comme un ensemble de molécules réunies deux à deux par des forces de liaisons.

Le théorème de travail minimum est une conséquence du théorème des dérivées du travail de déformation : Castigliano en a d'ailleurs donné une démonstration directe fondée sur l'emploi de multiplicateurs analogues à ceux de Lagrange. La démonstration du général Menabrea est du même ordre.

D'autre part, dans toutes les formules relatives au travail de déformation, nous n'avons pas parlé des effets des variations de température : Castigliano les a mentionnés dans son Ouvrage sur les systèmes élastiques, mais il n'a pas été suivi par la plupart des auteurs. Nous reviendrons sur cette question à la fin du Chapitre suivant, et nous montrerons comment on peut faire entrer les effets calorifiques dans les formules relatives au travail de déformation.

CHAPITRE IV.

PRINCIPES DE LA MÉTHODE DU TRAVAIL VIRTUEL.

A. La méthode du travail virtuel est d'autant plus féconde qu'elle met en jeu les variations quelconques des points et sections d'application des efforts extérieurs. En ce sens, elle donne la solution de nombreux problèmes statiquement indéterminés et se prête à l'étude des effets de température sur les systèmes élastiques.

Considérons un corps quelconque en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs, forces et couples F et C. Sous l'action de ces efforts, il se développe en tous les points du corps des forces intérieures ou moléculaires formant également un système en équilibre. Décomposons le volume total du corps en petits parallélépipèdes par des plans parallèles aux plans de coordonnées (*fig.* 1). Isolons l'un de ces volumes élémentaires en appliquant sur ses faces des forces normales et tangentielles f tenant en équilibre les forces intérieures φ agissant en tous les points de ce petit volume. La somme des travaux virtuels de ces forces intérieures et des forces appliquées aux faces est nulle pour toute déformation virtuelle du petit parallélépipède.

Évaluons le travail virtuel des forces f appliquées aux faces du petit volume et tenant en équilibre les forces intérieures φ correspondantes. Les forces normales n_x fournissent un travail virtuel,

$$n_x\,dy\,dz\,\delta\varepsilon_x\,dx = n_x\,\delta\varepsilon_x\,dv.$$

Les forces tangentielles t_{xy} donnent un travail virtuel

$$t_{xy}\,dy\,dz\,\delta i_{xy}\,dx = t_{xy}\,\delta i_{xy}\,dv;$$

les autres forces normales et tangentielles donnent des travaux virtuels analogues. De sorte que pour le petit volume dv la somme

des travaux virtuels des forces de faces sera

$$(n_x\delta\mathcal{E}_x+n_y\delta\mathcal{E}_y+n_z\delta\mathcal{E}_z+t_{yz}\delta i_{yz}+t_{zx}\delta i_{zx}+t_{xy}\delta i_{xy})\,dv.$$

Considérons maintenant le corps élastique entier, soumis aux efforts extérieurs F, C. La somme des travaux virtuels des forces φ intérieures aux petits volumes élémentaires est égale et opposée à la somme des travaux virtuels des tensions normales et tangentielles f appliquées aux faces de ces petits parallélépipèdes. On aura donc

$$\tau_v(\varphi)+\tau_v(f)=0,$$

mais la somme des travaux virtuels des efforts F, C extérieurs au corps solide et des forces moléculaires φ étant nulle, on a encore

$$\tau_v(\varphi)+\tau_v(\mathrm{F},\mathrm{C})=0.$$

On en conclut que

$$\tau_v(\mathrm{F},\mathrm{C})=\tau_v(f).$$

Or, si nous désignons par δl_k la projection sur F_k du déplacement linéaire virtuel du point d'application d'une force donnée F_k et par $\delta\theta_k$ le déplacement virtuel angulaire de la section d'application d'un couple extérieur C_k, on aura

$$\tau_v(\mathrm{F},\mathrm{C})=\Sigma\mathrm{F}_k\delta l_k+\Sigma\mathrm{C}_k\delta\theta_k.$$

De plus

$$\tau_v(f)=\int\int\int(n_x\delta\mathcal{E}_x+n_y\delta\mathcal{E}_y+n_z\delta\mathcal{E}_z+t_{yz}\delta i_{yz}+t_{zx}\delta i_{zx}+t_{xy}\delta i_{xy})\,dv.$$

On peut donc écrire définitivement :

$$\Sigma\mathrm{F}_k\delta l_k+\Sigma\mathrm{C}_k\delta\theta_k=\int\int\int(n_x\delta\mathcal{E}_x+n_y\delta\mathcal{E}_y+n_z\delta\mathcal{E}_z+t_{yz}\delta i_{yz}+t_{zx}\delta i_{zx}+t_{xy}\delta i_{xy})\,dv. \tag{25}$$

Cette relation fondamentale est l'équation du travail virtuel pour un système élastique quelconque, et permet de résoudre les problèmes relatifs à la recherche des déformations produites par les efforts extérieurs. On choisit pour cela d'une manière convenable les déplacements virtuels des points et sections d'application des forces F et couples C et on calcule les déformations virtuelles correspondantes du corps.

D'autre part, le calcul du travail virtuel des efforts intérieurs exprimé par l'intégrale triple dans la relation (25) peut être effectué en introduisant le travail de déformation τ du corps et sa variation virtuelle $\delta\tau$.

En effet, suivant la formule de Kirchhoff établie plus haut (Chap. III), on a

$$\tau = \int\int\int \mathrm{G}\, dv \Big[\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z)^2 + \frac{1}{2}(i_{yz}^2 + i_{zx}^2 + i_{xy}^2)\Big],$$

La variation sera

$$\delta\tau = \int\int\int 2\,\mathrm{G}\, dv \Big[\mathcal{E}_x\,\delta\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y\,\delta\mathcal{E}_y + \mathcal{E}_z\,\delta\mathcal{E}_z + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y + \mathcal{E}_z)(\delta\mathcal{E}_x + \delta\mathcal{E}_y + \delta\mathcal{E}_z) + \frac{1}{2}(i_{yz}\delta i_{yz} + i_{zx}\delta i_{zx} + i_{xy}\delta i_{xy})\Big].$$

En se reportant aux relations existant entre les $\mathcal{E}$ et n, et entre les i et t, on voit après calculs que

$$\delta\tau = \int\int\int (n_x\delta\mathcal{E}_x + n_y\delta\mathcal{E}_y + n_z\delta\mathcal{E}_z + t_{yz}\delta i_{yz} + t_{zx}\delta i_{zx} + t_{xy}\delta i_{xy})\, dv = \tau_v(f),$$

et ainsi définitivement, on peut écrire

$$\tau_v(\mathrm{F}, \mathrm{C}) = \delta\tau,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma \mathrm{F}_k \delta l_k + \Sigma \mathrm{C}_k \delta\theta_k = \delta\tau. \tag{26}$$

D'où ce résultat fondamental énoncé par Kirchhoff :

La somme des travaux virtuels des efforts extérieurs agissant sur un corps élastique quelconque, égale et opposée à la somme des travaux virtuels des forces moléculaires, est égale à la variation correspondante du travail de déformation.

Nous allons appliquer ce principe à la recherche des déplacements linéaires projetés et angulaires des points et sections d'un système élastique composé de Q pièces assemblées ou articulées, soumis à l'action des efforts extérieurs donnés F, C et auxi-

liaires Φ, Π (*voir* Chap. III, *fig.* 4). Soient toujours L_α, L_β les déplacements projetés des points α et β où agissent les forces F et Φ; de même soient Θ_γ et Θ_ω les déplacements angulaires des sections d'application des couples C et Π. Prenons comme variations virtuelles δl_k, $\delta \theta_k$, les variations réelles δL_α, δL_β, $\delta\Theta_\gamma$, $\delta\Theta_\omega$ qui sont évidemment compatibles avec les liaisons du système, l'équation (26) s'écrira

$$F\delta L_\alpha + \Phi\delta L_\beta + C\delta\Theta_\gamma + \Pi\delta\Theta_\omega = \delta\tau(F, C, \Phi, \Pi)$$

ou

$$F\delta L_\alpha + \Phi\delta L_\beta + C\delta\Theta_\gamma + \Pi\delta\Theta_\omega = \frac{\partial\tau}{\partial F}\delta F + \frac{\partial\tau}{\partial\Phi}\partial\Phi + \frac{\partial\tau}{\partial C}\delta C + \frac{\partial\tau}{\partial\Pi}\delta\Pi.$$

Si, dans cette expression, on remplace les variations δL_α, δL_β, $\delta\Theta_\gamma$, $\delta\Theta_\omega$ par leurs valeurs tirées des relations (1) du Chapitre III, on aura après calculs

$$\left(\lambda_{\alpha\alpha} F + \lambda_{\beta\alpha}\Phi + \theta_{\gamma\alpha} C + \theta_{\omega\alpha}\Pi - \frac{\partial\tau}{\partial F}\right)\delta F$$
$$+ \left(\lambda_{\alpha\beta} F + \lambda_{\beta\beta}\Phi + \theta_{\gamma\beta} C + \theta_{\omega\beta}\Pi - \frac{\partial\tau}{\partial\Phi}\right)\delta\Phi$$
$$+ \left(\lambda_{\alpha\gamma} F + \lambda_{\beta\gamma}\Phi + \theta_{\gamma\gamma} C + \theta_{\omega\gamma}\Pi - \frac{\partial\tau}{\partial C}\right)\delta C$$
$$+ \left(\lambda_{\alpha\omega} F + \lambda_{\beta\omega}\Phi + \theta_{\gamma\omega} C + \theta_{\omega\omega}\Pi - \frac{\partial\tau}{\partial\Pi}\right)\delta\Pi = 0.$$

Cette équation devant être satisfaite, quelles que soient les variations δF, $\delta\Phi$, δC, $\delta\Pi$, les coefficients de ces variations sont nuls, et l'on a ainsi les relations (4) du Chapitre III. En continuant le calcul comme nous l'avons fait dans ce Chapitre, on arrivera aux relations de réciprocité, partant au théorème des dérivées du travail de Castigliano et à son corollaire le théorème du travail minimum.

Les résultats trouvés plus haut pour les poutres pleines et les systèmes articulés pourraient donc être reproduits ici. On peut d'ailleurs, d'une façon directe, appliquer le principe des vitesses virtuelles en prenant, comme déplacements virtuels, les déplacements réels subis par les points et sections du système élastique, déplacements qui, par nature, sont compatibles avec les liaisons de ce système. On aura ainsi directement les déplacements élastiques en fonction des éléments statiques. Pour un tel système, le travail

virtuel des efforts F, C, Φ, Π, sera, dans cette hypothèse,

$$\mathrm{F}\mathrm{L}_\alpha + \Phi \mathrm{L}_\beta + \mathrm{C}\Theta_\gamma + \Pi\Theta_\omega.$$

Évaluons le travail des efforts intérieurs. Le déplacement (*fig.* 2) d'une section $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ par rapport à la section très voisine $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ située à distance ds de $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ avant toute déformation, se compose d'une rotation $d\xi$ autour de l'axe neutre de la section, d'une translation $d\eta$ suivant la direction de l'effort normal et d'une translation $d\zeta$ suivant la direction de l'effort tranchant. Ainsi, le travail virtuel des efforts intérieurs, dans l'hypothèse ci-dessus, sera pour la tranche d'épaisseur ds,

$$\mathfrak{M}\, d\xi + \mathfrak{N}\, d\eta + \mathfrak{T}\, d\zeta.$$

Le travail total des efforts intérieurs pour une poutre pleine l, faisant partie du système élastique considéré, aura ainsi pour expression

$$\int_0^l (\mathfrak{M}\, d\xi + \mathfrak{N}\, d\eta + \mathfrak{T}\, d\zeta).$$

Ce travail, pour le système élastique entier, s'écrira donc

$$\sum_1^{\mathrm{Q}} \int_0^l (\mathfrak{M}\, d\xi + \mathfrak{N}\, d\eta + \mathfrak{T}\, d\zeta),$$

en désignant par $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ les éléments statiques, moment fléchissant, effort normal, effort tranchant, provoqués en tous points du système par l'ensemble des efforts F, C, Φ, Π.

On écrira donc

$$\mathrm{F}\mathrm{L}_\alpha + \Phi \mathrm{L}_\beta + \mathrm{C}\Theta_\gamma + \Pi\Theta_\omega = \sum_1^{\mathrm{Q}} \int_0^l (\mathfrak{M}\, d\xi + \mathfrak{N}\, d\eta + \mathfrak{T}\, \delta\zeta).$$

en différentiant les deux membres de cette équation par exemple par rapport à Φ et à Π, on aura

$$\mathrm{L}_\beta = \sum_1^{\mathrm{Q}} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \Phi}\, d\xi + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \Phi}\, d\eta + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \Phi}\, d\zeta \right)$$

et

$$\Theta_\omega = \sum_1^{\mathrm{Q}} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \Pi}\, d\xi + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \Pi}\, d\eta + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \Pi}\, d\zeta \right);$$

mais on sait que

$$d\xi = \frac{\partial \mathfrak{M}}{EI}\,ds, \qquad d\eta = \frac{\partial \mathfrak{N}}{E\Omega}\,ds, \qquad d\zeta = \frac{\mathfrak{E}}{G\Omega}\,ds,$$

d'où

$$L_\beta = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{EI}\,\frac{\partial \partial \mathfrak{M}}{\partial \Phi} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{E\Omega}\,\frac{\partial \partial \mathfrak{N}}{\partial \Phi} + \frac{\mathfrak{E}}{G\Omega}\,\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \Phi} \right) ds$$

et

$$\theta_\omega = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{EI}\,\frac{\partial \partial \mathfrak{M}}{\partial \Pi} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{E\Omega}\,\frac{\partial \partial \mathfrak{N}}{\partial \Pi} + \frac{\mathfrak{E}}{G\Omega}\,\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \Pi} \right) ds,$$

ou bien en remplaçant $\partial\mathfrak{M}$, $\partial\mathfrak{N}$, $\mathfrak{E}$ par $\partial\mathfrak{M}'$, $\partial\mathfrak{N}$, $\mathfrak{E}'$ et $\partial\mathfrak{M}''$, $\partial\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{E}''$ qui se rapportent à l'action respective des efforts F, C, Φ et F, C, Π, on aura

$$L_\beta = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{\partial \mathfrak{M}'}{EI}\,\frac{\partial \partial \mathfrak{M}'}{\partial \Phi} + \frac{\partial \mathfrak{N}'}{E\Omega}\,\frac{\partial \partial \mathfrak{N}'}{\partial \Phi} + \frac{\mathfrak{E}'}{G\Omega}\,\frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial \Phi} \right) ds$$

et

$$\theta_\omega = \sum_1^Q \int_0^l \left(\frac{\partial \mathfrak{M}''}{EI}\,\frac{\partial \partial \mathfrak{M}''}{\partial \Phi} + \frac{\partial \mathfrak{N}''}{E\Omega}\,\frac{\partial \partial \mathfrak{N}''}{\partial \Phi} + \frac{\mathfrak{E}''}{G\Omega}\,\frac{\partial \mathfrak{E}''}{\partial \Phi} \right) ds.$$

On retrouve ainsi les résultats connus du Chapitre III et l'on sait que ces relations s'écrivent définitivement

$$L_\beta = \sum_1^P \int_0^l \left(\frac{M}{EI}\,\frac{m}{\Phi} + \frac{N}{E\Omega}\,\frac{n}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega}\,\frac{t}{\Phi} \right) ds$$

et

$$\theta_\omega = \sum_1^P \int_0^l \left(\frac{M}{EI}\,\frac{\mu}{\Pi} + \frac{N}{E\Omega}\,\frac{\nu}{\Pi} + \frac{T}{G\Omega}\,\frac{\xi}{\Pi} \right) ds,$$

en désignant par MNT, *mnt*, $\mu\nu\xi$, les éléments statiques relatifs à l'action sur le système principal ramené à l'état complètement isostatique, des efforts FC donnés et de liaisons surabondantes XK, de la force auxiliaire Φ et du couple Π.

Ces dernières formules (13) et (16) déjà trouvées par M. de Fontviolant au moyen du travail de déformation (Chap. III) ont été établies à nouveau par cet auteur en faisant application du principe vitesses virtuelles. Le système principal ayant été ramené à des l'état complètement isostatique par adjonction des forces et couples de liaisons surabondantes X et K, supprimons l'action des efforts

extérieurs directement appliqués FC, et partant celle des liaisons hyperstatiques XK. Puis, faisons agir sur ce système isostatique les seules forces Φ et Π qui provoquent des éléments statiques mnt, $\mu\nu\varepsilon$. Prenons toujours comme déplacements virtuels les déplacements réels $\frac{M}{EI}ds$, $\frac{N}{E\Omega}ds$, $\frac{T}{G\Omega}ds$ des sections du système, dans sa déformation sous l'influence des efforts extérieurs F, C, X, K.

Le travail virtuel des efforts intérieurs aura pour valeur

$$\sum_{1}^{P}\int_{0}^{l}\left[(m+\mu)\frac{M}{EI}ds+(n+\nu)\frac{N}{E\Omega}ds+(t+\varepsilon)\frac{T}{G\Omega}ds\right],$$

D'autre part, dans cette même hypothèse de déplacements réels L_β et Θ_ω pris comme déplacements virtuels, le travail des efforts extérieurs auxiliaires Φ et Π, s'écrit

$$\Phi L_\beta+\pi\Theta_\omega,$$

les travaux des forces et couples de liaison relatifs au système principal isostatique soumis aux efforts Φ et Π, étant, par nature, essentiellement nuls.

On aura donc l'équation

$$\Phi L_\beta+\Pi\Theta_\omega=\sum_{1}^{P}\int_{0}^{l}\left[\frac{M}{EI}(m+\mu)+\frac{N}{E\Omega}(n+\nu)+\frac{T}{G\Omega}(t+\varepsilon)\right]ds.$$

Si l'on se borne à la recherche des déplacements linéaires, on fera dans cette relation

$$\Pi=\mu=\nu=\varepsilon=0,$$

et l'on trouvera la formule (13).

En faisant dans cette même relation

$$\Phi=m=n=t=0,$$

on obtiendra de même le déplacement angulaire Θ_ω sous la forme (16).

L'application des résultats ci-dessus aux poutres pleines et systèmes articulés est immédiate et a été exposée plus haut (Chap. III).

Rappelons à ce sujet que le principe des vitesses virtuelles a été à l'origine, appliqué par Mohr, dans la recherche des tensions

d'un système articulé à barres surabondantes. Nous considérerons plus loin, dans ce sens, un système articulé à liaisons intérieures hyperstatiques, plus généralement soumis à l'influence de variations de température.

B. C'est la méthode du travail virtuel qui se prête le mieux à l'étude des effets calorifiques dans les systèmes élastiques.

Les variations de température n'influent que sur les déplacements longitudinaux dont la valeur, par unité de surface pour un corps élastique quelconque, prend la forme

$$\mathcal{E}'_x = \frac{1}{E}(n_x - \sigma n_y - \sigma n_z) + kj,$$

$$\mathcal{E}'_y = \frac{1}{E}(n_y - \sigma n_z - \sigma n_x) + kj,$$

$$\mathcal{E}'_z = \frac{1}{E}(n_z - \sigma n_x - \sigma n_y) + kj,$$

n_x, n_y, n_z, efforts intérieurs par unité de surface ; k coefficient de dilatation linéaire, j variation de température. Le travail de déformation dû aux effets calorifiques pour tout le corps élastique sera

$$\tau_j = \int\int\int (n_x - n_y + n_z) kj \, dv.$$

On peut supposer pour l'intégration que la température du corps varie, suivant une loi connue, avec les coordonnées du centre du petit volume dv auquel elles se rapportent.

Pour les poutres fléchies à grands rayons de courbure, on aura

$$n_y = 0, \qquad n_z = 0,$$

$$n_x = \frac{N}{\Omega} - \frac{M_y}{I}$$

et

$$\tau_j = \int_0^l \left[\int_0^{\Omega} \left(\frac{N}{\Omega} - \frac{M_y}{I} \right) kj \, d\Omega \right] ds,$$

suivant notations connues.

Dans le cas où j varie avec l'ordonnée y dans une même section, on calculera les deux fonctions

$$\varphi(j) = \Sigma j \, d\Omega \qquad \text{et} \qquad \psi(j) = \Sigma y j \, d\Omega$$

étendues à tous les éléments $d\Omega$ de la section, d'où

$$\tau_j = \int_0^l k\,\varphi(j)\frac{N}{\Omega}\,ds + \int_0^l k\,\psi(j)\frac{M}{I}\,ds,$$

Si j est constant dans toute la section Ω, alors

$$\psi(j) = j\Sigma y\,d\Omega = 0$$

et

$$\varphi(j) = j\Sigma\,d\Omega = j\Omega,$$

d'où

$$\tau_j = \int_0 kjN\,ds.$$

Pour un système élastique quelconque, composé de Q poutres pleines droites ou courbes, on aura

$$\tau_j = \sum_1^Q \int_0^l kjN\,ds.$$

Ceci posé, nous appellerons *travail total de déformation* d'un système élastique soumis à des variations de température, la fonction

$$H = \sum_1^Q \frac{1}{2}\int_0^l \left[\frac{M^2}{EI} + \frac{(N+N_j)^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega}\right] ds,$$

dans laquelle M, N, T désignent les éléments statiques se rapportant à l'action des efforts extérieurs et N_j les efforts normaux dus aux actions calorifiques.

On aura

$$H = \sum_1^Q \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega}\right) ds + \sum_1^Q \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N_j^2}{E\Omega}\,ds + \sum_1^Q \int_0^l \frac{NN_j}{E\Omega}\,ds;$$

mais les variations $\frac{N_j\,ds}{E\Omega}$ étant des variations réelles, on peut les prendre comme déplacements virtuels des tensions normales N en équilibre. De sorte qu'on a, par application du principe du travail virtuel,

$$\sum_1^Q \int_0^l \frac{NN_j}{E\Omega}\,ds = 0$$

et ainsi

$$H=\sum_{1}^{Q}\frac{1}{2}\int_{0}^{l}\left(\frac{M^2}{EI}+\frac{N^2}{E\Omega}+\frac{T^2}{G\Omega}\right)ds+\sum_{1}^{Q}\frac{1}{2}\int_{0}^{l}\frac{N_j^2}{E\Omega}\,ds.$$

Le travail de déformation total d'un système élastique est donc égal à la somme des travaux $\tau+\tau_j$ dus aux actions séparées des efforts extérieurs et des tensions calorifiques. Cette évaluation du travail total de déformation a été mentionnée par Mohr à propos des systèmes articulés à lignes surabondantes, soumis à des variations de température. Dès lors, si l'on remarque que

$$\tau_j=\sum_{1}^{Q}\int_{0}^{l}kj\,N\,ds,$$

on aura définitivement

$$(27)\qquad H=\sum_{1}^{Q}\int_{0}^{l}\left[\frac{M^2}{2EI}+\left(\frac{N^2}{2E\Omega}+kj\,N\right)+\frac{T^2}{2G\Omega}\right]ds.$$

D'autre part, si l'on applique le principe des vitesses virtuelles à la recherche des déplacements linéaires et angulaires, on pourra faire agir les efforts extérieurs F, C, Φ, Π dans le système ramené à sa température de pose, en prenant comme déplacements virtuels les déplacements réels $\frac{\partial\mathfrak{M}}{EI}\,ds$, $\left(\frac{\mathfrak{N}}{E\Omega}+kj\right)ds$, $\frac{\mathfrak{T}}{G\Omega}\,ds$, subis par les points et sections du système élastique dans sa déformation, sous l'influence des efforts extérieurs et des tensions calorifiques.

On aura ainsi après calculs, comme plus haut,

$$(28)\quad L_\beta=\sum_{1}^{Q}\int_{0}^{l}\left[\frac{\partial\mathfrak{M}'}{EI}\,\frac{\partial\partial\mathfrak{M}'}{\partial\Phi}+\left(\frac{\mathfrak{N}'}{E\Omega}+kj\right)\frac{\partial\mathfrak{N}'}{\partial\Phi}+\frac{\mathfrak{T}'}{G\Omega}\,\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial\Phi}\right]ds,$$

$$(29)\quad \Theta_\omega=\sum_{1}^{Q}\int_{0}^{l}\left[\frac{\partial\mathfrak{M}''}{EI}\,\frac{\partial\partial\mathfrak{M}''}{\partial\Pi}+\left(\frac{\mathfrak{N}''}{E\Omega}+kj\right)\frac{\partial\mathfrak{N}''}{\partial\Pi}+\frac{\mathfrak{T}''}{G\Omega}\,\frac{\partial\mathfrak{T}''}{\partial\Pi}\right]ds$$

ou

$$(30)\qquad L_\beta=\sum_{1}^{Q}\int_{0}^{l}\left[\frac{M}{EI}\,\frac{m'}{\Phi}+\left(\frac{N}{E\Omega}+kj\right)\frac{n'}{\Phi}+\frac{T}{G\Omega}\,\frac{t'}{\Phi}\right]ds,$$

$$(31)\qquad \Theta_\omega=\sum_{1}^{Q}\int_{0}^{l}\left[\frac{M}{EI}\,\frac{\mu'}{\Pi}+\left(\frac{N}{E\Omega}+kj\right)\frac{\nu'}{\Pi}+\frac{T}{G\Omega}\,\frac{\varepsilon'}{\Pi}\right]ds$$

et définitivement

$$(32) \qquad L_\beta = \sum_1^P \int_0^l \left[\frac{M}{EI} \frac{m}{\Phi} + \left(\frac{N}{E\Omega} + kj \right) \frac{n}{\Phi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{t}{\Phi} \right],$$

$$(33) \qquad \theta_\omega = \sum_1^P \int_0^l \left[\frac{M}{EI} \frac{\mu}{\Pi} + \left(\frac{N}{E\Omega} + kj \right) \frac{\nu}{\Pi} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\varepsilon}{\Pi} \right] ds,$$

suivant notations connues.

Ces dernières formes tout à fait générales montrent qu'on peut faire agir plus simplement les seuls efforts auxiliaires Φ et Π dans le système principal isostatique ramené à sa température de pose, en prenant comme déplacements virtuels les déplacements réels $\frac{M}{EI} ds$, $\left(\frac{N}{E\Omega} + kj \right) ds$, $\frac{T}{G\Omega} ds$ subis par les points et sections de ce système principal dans sa déformation sous l'influence des efforts extérieurs F, C, X, K et des tensions calorifiques. C'est le principe de la méthode de M. B. de Fontviolant exposée plus haut.

Les méthodes fondées sur l'emploi du principe des vitesses virtuelles se prêtent ainsi à la recherche des déplacements élastiques et partant à celle des efforts de liaisons surabondantes dans les systèmes soumis à des variations de température et à des tensions de pose qu'on ramène aux précédentes. La méthode du travail de déformation se prête moins facilement à cette recherche et les auteurs n'ont guère fait usage de cette méthode dans ce sens. Cependant, si l'on introduit la notion du travail de déformation total, somme des travaux dus aux actions séparées des efforts extérieurs et des tensions calorifiques, on aura, d'après la relation (27),

$$H = \sum_1^Q \int_0^l \left[\frac{\mathfrak{M}'^2}{EI} + \left(\frac{\mathfrak{N}'^2}{E\Omega} + kj\, \mathfrak{N}' \right) + \frac{\mathfrak{T}'^2}{G\Omega} \right] ds$$

et

$$H = \sum_1^Q \int_0^l \left[\frac{\mathfrak{M}''^2}{EI} + \left(\frac{\mathfrak{N}''^2}{E\Omega} + kj\, \mathfrak{N}'' \right) + \frac{\mathfrak{T}''^2}{G\Omega} \right] ds,$$

en supposant l'action sur le système élastique à température variable, des efforts extérieures F, C, Φ ou F, C, Π provoquant des éléments statiques respectifs $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{T}'$ et $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{T}''$.

Dès lors, les relations (28) et (29) montrent que

$$L_\beta = \frac{\partial H}{\partial \Phi}(F, C, \Phi), \tag{34}$$

$$\theta_\omega = \frac{\partial H}{\partial \Pi}(F, C, \Pi), \tag{35}$$

et ainsi avec une extension de la notion du travail de déformation, on peut encore dire que le théorème des dérivées du travail de Castigliano s'applique à un système élastique quelconque soumis à des variations de température.

Par des raisonnements et calculs analogues à ceux du Chapitre III, on verrait que

$$L_\beta = \frac{\partial H_P}{\partial \Phi}(F, C, X, K, \Phi), \tag{36}$$

$$\theta_\omega = \frac{\partial H_P}{\partial \Pi}(F, C, X, K, \Phi). \tag{37}$$

Les formules (9) et (10) de ce Chapitre, avec la même notion de travail de déformation total, s'écrivent

$$L_\beta = \frac{1}{\Phi}[H(F, C, \Phi) - H(F, C) - \tau(\Phi)], \tag{38}$$

$$\theta_\omega = \frac{1}{\Pi}[H(F, C, \Pi) - H(F, C) - \tau(\Pi)], \tag{39}$$

ou encore

$$L_\beta = \frac{1}{\Phi}[H_P(F, C, X, K, \Phi) - H_P(F, C, X, K) - \tau_P(\Phi)], \tag{40}$$

$$\theta_\omega = \frac{1}{\Pi}[H_P(F, C, X, K, \Pi) - H_P(F, C, X, K) - \tau_P(\Pi)]. \tag{41}$$

Les relations (30), (32), (34), (38), (36), (40) des déplacements linéaires sont équivalentes entre elles et de même celles (31), (33), (35), (39), (37), (41) des déplacements angulaires. Nous retiendrons plus spécialement les relations (32) et (33) exprimées en fonction des éléments statiques et que nous appellerons *formules générales de M. B. de Fontviolant.*

Les formes générales plus haut des déplacements linéaires et angulaires s'appliquent immédiatement à la recherche des efforts de liaisons surabondantes, dans les systèmes élastiques à température variable.

Les équations aux liaisons hyperstatiques sont donc

$$\sum_{1}^{P}\int_{0}^{l}\left[\frac{M}{EI}\frac{m}{X}+\left(\frac{N}{E\Omega}+kj\right)\frac{n}{X}+\frac{T}{G\Omega}\frac{t}{X}\right]ds$$

$$+\sum_{P+1}^{Q}\int_{0}^{l}\left[\frac{M}{EI}\frac{m}{X}+\left(\frac{N}{E\Omega}+kj\right)\frac{n}{X}+\frac{T}{G\Omega}\frac{t}{X}\right]ds=0,$$

$$\sum_{1}^{P}\int_{0}^{l}\left[\frac{M}{EI}\frac{\mu}{K}+\left(\frac{N}{E\Omega}+kj\right)\frac{\nu}{K}+\frac{T}{G\Omega}\frac{\varepsilon}{K}\right]ds$$

$$+\sum_{P+1}^{Q}\int_{0}^{l}\left[\frac{M}{EI}\frac{\mu}{K}+\left(\frac{N}{E\Omega}+kj\right)\frac{\nu}{K}+\frac{T}{G\Omega}\frac{\varepsilon}{K}\right]ds=0$$

ou

$$\frac{1}{\mathfrak{X}}[H_P(F, C, X, K, \mathfrak{X})-H_P(F, C, X, K)-\tau_P(\mathfrak{X})]$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{X}}[H_S(F, C, X, K, \mathfrak{X})-H_S(F, C, X, K)-\tau_S(\mathfrak{X})]=0,$$

$$\frac{1}{\mathfrak{K}}[H_P(F, C, X, K, \mathfrak{K})-H_P(F, C, X, K)-\tau_P(\mathfrak{K})]$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{K}}[H_S(F, C, X, K, \mathfrak{K})-H_S(F, C, X, K)-\tau_S(\mathfrak{K})]=0.$$

ou enfin

$$\frac{\partial H_P}{\partial X}(F. C, X, K)+\frac{\partial H_S}{\partial X}(F, C, X, K)=0,$$

$$\frac{\partial H_P}{\partial K}(F, C, X, K)+\frac{\partial H_S}{\partial K}(F, C, X, K)=0.$$

Ainsi le théorème du travail minimum de déformation total s'applique à la recherche des efforts de liaisons hyperstatiques d'un système élastique soumis à des actions calorifiques.

Nous allons à ce sujet rappeler la méthode de Mohr relative aux systèmes articulés surabondants à température variable, et nous montrerons comment les résultats de cet auteur peuvent conduire à une généralisation du théorème du travail minimum de Castigliano.

On sait, comme nous l'avons dit, qu'on peut, par des variations de températures convenablement choisies et différentes s'il le faut de barre à barre, annuler les tensions de pose. On a donc à chercher les tensions provoquées : 1° par les forces extérieures

supposées plus simplement appliquées aux nœuds; 2° par les variations de température j sur les barres de longueur l.

On sait calculer les tensions provoquées par les forces extérieures; en ce qui concerne les variations de température, si les barres étaient séparées, elles prendraient des accroissements de longueur klj. Lorsque le système articulé est sans barres surabondantes, il y a compatibilité entre ces dilatations, ou, comme dit M. Maurice Levy, le système articulé est librement dilatable. Mais, dans le cas contraire, il se produit des tensions nouvelles et les véritables allongements des barres sont :

$$(42) \qquad \Delta l = klj + \frac{\mathrm{N}l}{\mathrm{E}\Omega} = klj + \frac{l}{\mathrm{E}\Omega}(\mathrm{N}_0 + a'\mathrm{N}' + a''\mathrm{N}'' + \ldots)$$

en vertu du principe de superposition et en désignant par :

N la tension dans une barre quelconque, surabondante ou non, du système hyperstatique proposé;

N_0 la partie de cette tension relative à l'action des forces extérieures données sur le seul système principal isostatique; N_0 est donc nul pour toutes les barres surabondantes;

a', a'', ... des nombres indépendants des charges extérieures et représentant des coefficients d'influence correspondant respectivement à l'action isolée sur le système principal des paires de forces $\mathrm{N}' = +1$, $\mathrm{N}'' = +1$, ..., agissant suivant les barres surabondantes supprimées. Pour la barre surabondante de tension N' le coefficient $a' = +1$, tous les autres coefficients a'', a''', ... étant nuls. Remarque analogue pour les tensions N'' pour lesquelles $a'' = +1$, ...

Donc, si l'on applique l'équation fondamentale des vitesses virtuelles

$$\Sigma \mathrm{F}_k \mathrm{L}_k = \Sigma \mathrm{N}\,\Delta l = \Sigma(\mathrm{N}_0 + a'\mathrm{N}' + a''\mathrm{N}'' + \ldots)\,\Delta l$$

aux états successifs

$$\mathrm{N}' = +1, \qquad \mathrm{N}'' = +1, \qquad \ldots$$

on aura

$$\Sigma a'\,\Delta l = 0, \qquad \Sigma a''\,\Delta l = 0, \qquad \ldots,$$

en prenant toujours pour déplacements virtuels les déplacements

réels correspondant à l'action des forces extérieures sur le système articulé hyperstatique.

Ces dernières relations sont celles de compatibilité entre les longueurs des tiges. On les écrit, en vertu de (42)

$$(43)\quad \begin{cases} \Sigma a' klj + \Sigma a' \dfrac{l}{E\Omega} N_0 + \Sigma a'^2 \dfrac{l}{E\Omega} N' + \Sigma a' a'' \dfrac{l}{E\Omega} N'' + \ldots = 0, \\ \Sigma a'' klj + \Sigma a'' \dfrac{l}{E\Omega} N_0 + \Sigma a' a'' \dfrac{l}{E\Omega} N' + \Sigma a''^2 \dfrac{l}{E\Omega} N'' + \ldots = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On a ainsi un système d'équations en nombre égal à celui des inconnues statiquement indéterminées N′, N″, ... On pourra ainsi calculer les tensions surabondantes et, par suite, toutes les tensions du système articulé proposé. On remarquera essentiellement que N′ ne dépend pas de N_0 et ainsi le terme $\Sigma a' \frac{N_0}{E\Omega}$ se rapporte uniquement aux barres du système articulé principal. De plus, le coefficient d'influence a' qui vaut $+1$ pour la barre surabondante de tension N′ est nul pour toutes les autres barres, de sorte que les termes $\Sigma a' klj$ et $\Sigma \frac{a'^2 l N'}{E\Omega}$ se rapportent aux barres du système principal et à la seule barre surabondante de tension N′. Même raisonnement pour les autres tiges surabondantes de tensions N″, N‴, ...

Ceci posé, désignons par N_F la partie de la tension totale N d'une barre quelconque surabondante ou non, correspondante à l'action des forces extérieures et par N_j la partie de cette tension correspondant aux actions calorifiques sur le système articulé hyperstatique. On aura

$$N = N_F + N_j$$

et pour une barre surabondante

$$N' = N'_F + N'_j.$$

Le travail total de déformation s'écrit :

$$H = \tau_F + \tau_j = \sum \frac{N_F^2 l}{2E\Omega} + \sum \frac{N_j^2 l}{2E\Omega}.$$

La fonction H étant une forme quadratique des variables N′, on

vérifie que la dérivée $\frac{\partial H}{\partial N'}$ est égale à la somme des dérivées partielles de τ_F et τ_j, la première par rapport à N'_F, la seconde par rapport à N'_j. On a donc

$$\frac{\partial H}{\partial N'} = \frac{\partial \tau_F}{\partial N'_F} + \frac{\partial \tau_j}{\partial N'_j} = \sum \frac{N_F l}{E\Omega}\frac{\partial N_F}{\partial N'_F} + \sum \frac{N_j l}{E\Omega}\frac{\partial N_j}{\partial N'_j},$$

mais

$$\frac{N_F l}{E\Omega} = \frac{l}{E\Omega}(N_0 + a' N'_F + a'' N''_F + \dots),$$

$$\frac{N_j l}{E\Omega} = kjl + \frac{l}{E\Omega}(a' N'_j + a'' N''_j + \dots),$$

avec

$$\frac{\partial N_F}{\partial N'_F} = \frac{\partial N_j}{\partial N'_j} = a',$$

d'où

$$\frac{\partial H}{\partial N'} = \sum \frac{a' l}{E\Omega}(N_0 + a' N'_F + a'' N''_F + \dots) + \Sigma a' \left[klj - \frac{l}{E\Omega}(a' N'_j + a'' N''_j + \dots) \right]$$

ou

$$\frac{\partial H}{\partial N'} = \sum a' klj - \sum \frac{a' l N_0}{E\Omega} - \sum (N'_F + N'_j)\frac{l a'^2}{E\Omega} + \sum (N''_F + N''_j)\frac{l a' a''}{E\Omega} + \dots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial H}{\partial N'} = \sum a' klj - \sum \frac{a' l N_0}{E\Omega} + \sum \frac{l a'^2 N'}{E\Omega} + \sum \frac{l a' a'' N''}{E\Omega} + \dots$$

de même

$$\frac{\partial H}{\partial N''} = \sum a'' klj + \sum \frac{a'' l N_0}{E\Omega} + \sum \frac{a' a'' l N'}{E\Omega} + \sum \frac{a''^2 l N''}{E\Omega} + \dots$$

Or, les seconds membres de $\frac{\partial H}{\partial N'}$, $\frac{\partial H}{\partial N''}$, ... sont nuls en vertu des relations (43). Donc définitivement

$$\frac{\partial H}{\partial N'} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial N''} = 0, \qquad \dots$$

Ainsi, le théorème généralisé du travail minimum de Castigliano s'applique aux systèmes articulés à liaisons surabondantes soumis à des effets de température.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS.

De l'étude faite ci-dessus (Chap. III et IV) il ressort que les théorèmes des dérivées du travail de Castigliano, ou, si l'on veut, les formules de M. B. de Fontviolant, peuvent être regardés indifféremment comme des résultats relatifs à la méthode du travail de déformation ou à celle fondée sur l'application du principe du travail virtuel. Ces théorèmes et formules donnent les déplacements linéaires et angulaires en tout point et section d'un système élastique quelconque.

Leur corollaire, le théorème du travail minimum, permet de trouver les équations nécessaires à la détermination des forces et couples de liaisons statiquement indéterminés relatifs à ce système (poussée d'un arc à deux rotules, moments d'encastrement d'une poutre droite, liaisons surabondantes d'un arc encastré, réactions hyperstatiques d'une poutre continue, tensions surabondantes d'un système articulé, etc.).

Les applications de la méthode du travail de déformation et de celle fondée sur l'emploi du principe des vitesses virtuelles au moyen des théorèmes et formules précités sont donc très nombreuses dans la résistance des matériaux. On les trouvera, pour les problèmes classiques, dans l'Ouvrage de Castigliano : *Théorie des systèmes élastiques*, dans les Traités de Brune, Föppl (traduction de M. E. Hahn), de M. Vogt (cours professé à la Faculté des Sciences de Nancy), etc., enfin dans le Mémoire de M. B. de Fontviolant intitulé : *L'équation générale de l'élasticité des constructions et ses applications.*

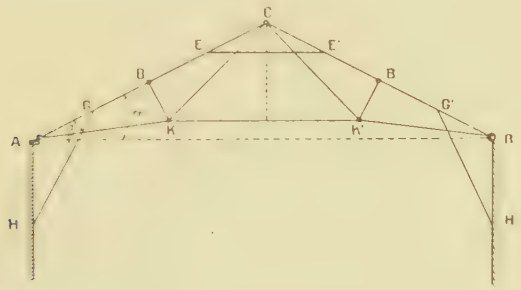
Pour les applications moins classiques et d'ordre supérieur, on pourra consulter plusieurs autres Mémoires de M. de Fontviolant, en particulier celui sur la *Statique graphique des arcs électriques*,

et aussi différents écrits des auteurs allemands cités à la bibliographie.

Nous allons donner ci-après, comme application, un calcul de ferme Polonceau articulée à une bielle, renforcée par organes de soutien (entrait et aisselliers). Nous nous réservons d'ailleurs de généraliser, dans un Mémoire spécial, la question des fermes de charpente à lignes de soutien intérieures et extérieures.

Soit donc une ferme Polonceau ABCB'A' articulée à une bielle, comportant une panne intermédiaire (non aux nœuds) aux milieux G, E, G', E', de chaque segment d'arbalétrier AB, BC,

Fig. 8.



A'B', B'C' (*fig.* 8). Les entraits EE' et aisseliers GH, G'H' sont des pièces de soutien qui soulagent la flexion secondaire des arbalétriers et la ferme entière. Nous définissons les extrémités E, E', G, G' comme étant de simples points d'articulation des entraits et aisselliers par rapport aux segments d'arbalétriers soutenus en leurs milieux. Même hypothèse d'articulation aux extrémités d'appui H, H' des aisselliers.

Les caractéristiques géométriques et physiques des différentes pièces de la ferme, supposées de même matière, sont :

		Longueur.	Section.
Segments d'arbalétriers....	AB = BC = A'B' = B'C	λ	S
Bielles.....	BK = B'K'	q	ρ
Tirants de pied.....	AK = A'K'	t	θ
Tirants de tête.....	CK = CK'	t	ε
Tirant horizontal.....	KK'	l	σ
Entrait.....	EE'	L	Ω
Aisselliers.....	GH = G'H'	$\mathfrak{L}$	ω

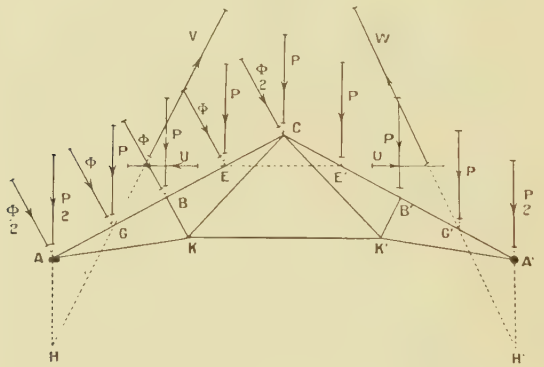
Appelons U, V, W les efforts longitudinaux supportés par les

entraits et aisselliers, la ferme étant chargée de poids verticaux P (charges permanentes et neige) et de poids Φ normaux au versant gauche (composante efficace du vent). L'appui A est un appui à dilatation, celui A′ opposé au vent est à rotule. Nous désignerons par α l'ouverture au pied de la ferme, par β celle des aisseliers par rapport aux arbalétriers.

Décomposons la ferme, proposée en un système principal (ferme Polonceau proprement dite) et un système surabondant (lignes de soutien). A cet effet, nous introduisons système à système les forces de liaisons U, V, W.

Considérons le système principal isostatique (*fig.* 9).

Fig. 9.



L'action des forces verticales P provoque des efforts longitudinaux, donnés par le diagramme réciproque (*fig.* 10 et 11), savoir :

$F_1^P = F_{11}^P$ (compression), $F_2^P = F_{10}^P$ (tension), $F_3^P = F_9^P$ (compression),
$F_4^P = F_8^P$ (compression), $F_5^P = F_7^P$ (tension), F_6^P (tension).

L'action des forces normales Φ donne les efforts longitudinaux suivants (*fig.* 12 et 13) :

F_1^Φ (compression), F_2^Φ (tension), F_3^Φ (compression),
F_4^Φ (compression), F_5^Φ (tension), F_6^Φ (tension),
F_7^Φ (tension), $F_8^\Phi = F_{11}^\Phi$ (compression), $F_9^\Phi = 0$, F_{10}^Φ (tension).

Les forces U supposées réparties aux nœuds adjacents donnent

(*fig.* 14 et 15) :

$$F_1^U = c_1 U = 0, \qquad F_2^U = c_2 U = 0,$$
$$F_3^U = -c_3 U \text{ (tension)}, \qquad F_4^U = -c_4 U \text{ (tension)},$$
$$F_5^U = -c_5 U \text{ (compression)}, \qquad F_6^U = +c_6 U \text{ (tension)},$$
$$F_7^U = -c_7 U \text{ (compression)}, \qquad F_8^U = -c_8 U \text{ (tension)},$$
$$F_9^U = -c_9 U \text{ (tension)}, \qquad F_{10}^U = c_{10} U = 0,$$
$$F_{11}^U = c_{11} U = 0;$$

Fig. 10.

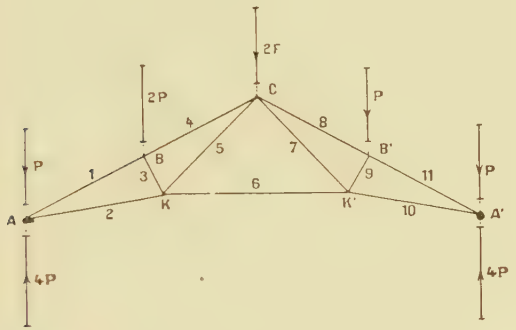
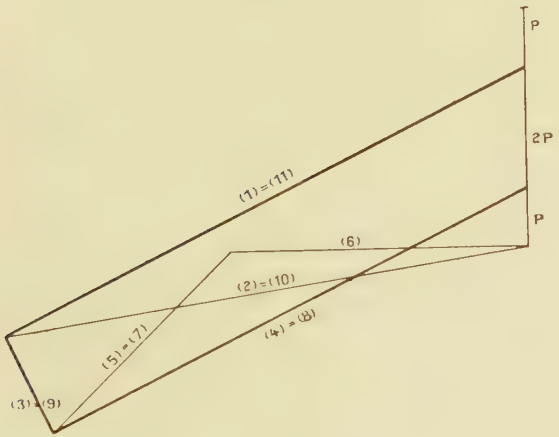


Fig. 11.



avec

$$c_1 = c_{11} = c_2 = c_{10} = 0, \qquad c_3 = c_9, \qquad c_4 = c_8, \qquad c_5 = c_7.$$

Fig. 12.

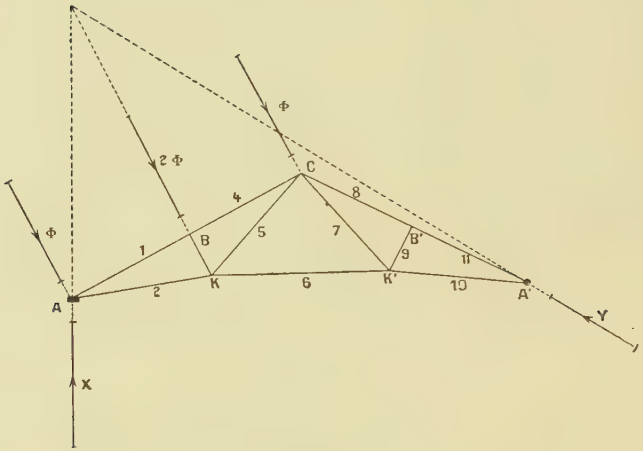


Fig. 13.

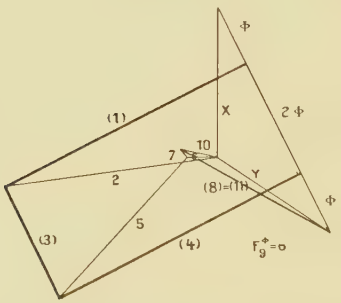


Fig. 14.

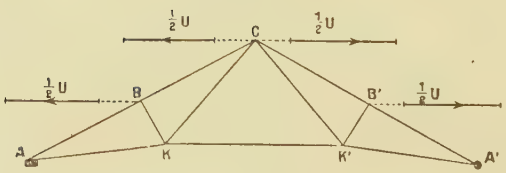
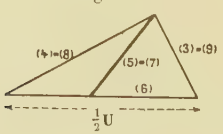


Fig. 15.



La force V donne de même (*fig.* 16 et 17) :

$F_1^V = -a_1\ V$ (tension), $F_2^V = -a_2\ V$ (compression),
$F_3^V = -a_3\ V$ (tension), $F_4^V = -a_4\ V$ (tension),
$F_5^V = -a_5\ V$ (compression), $F_6^V = -a_6\ V$ (compression),
$F_7^V = -a_7\ V$ (compression), $F_8^V = -a_8\ V$ (tension),
$F_9^V = a_9\ V = 0$, $F_{10}^V = -a_{10} V$ (compression),
$F_{11}^V = -a_{11} V$ (tension);

Fig. 16.

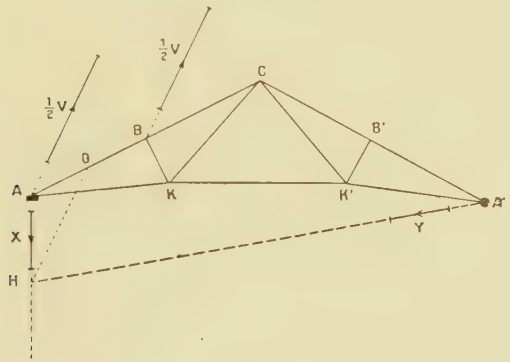
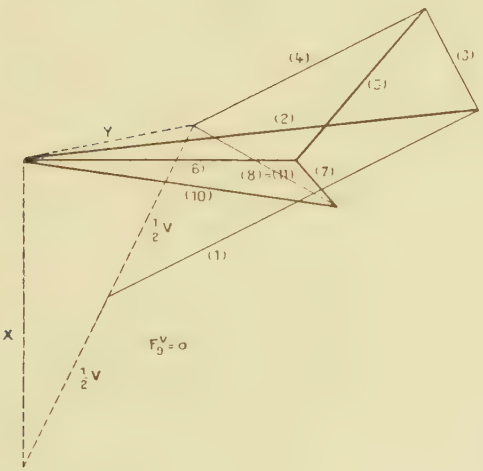


Fig. 17.



avec

$$a_9 = 0, \qquad a_8 = a_{11}.$$

Enfin la force W donne (*fig.* 18 et 19) :

$F_1^W = -b_1\ W$ (tension), $F_2^W = -b_2\ W$ (compression),
$F_3^W = b_3\ W = 0$, $F_4^W = -b_4\ W$ (tension),
$F_5^W = -b_5\ W$ (compression), $F_6^W = -b_6\ W$ (compression),
$F_7^W = -b_7\ W$ (compression), $F_8^W = -b_8\ W$ (tension),
$F_9^W = -b_9\ W$ (tension), $F_{10}^W = -b_{10}\ W$ (compression),
$F_{11}^W = -b_{11}\ W$ (tension);

avec

$$b_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad b_1 = b_4.$$

Fig. 18.

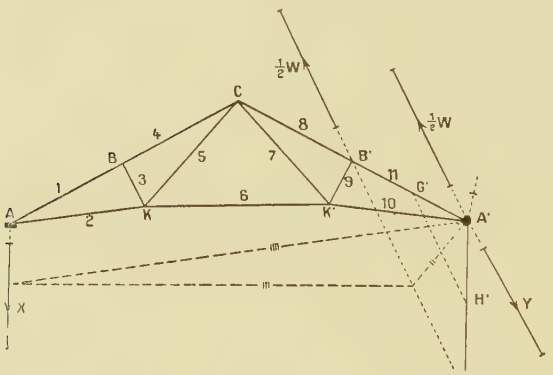
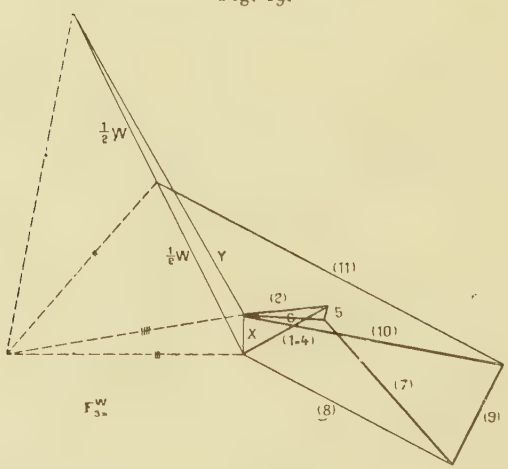


Fig. 19.



Les a, b, c sont des coefficients d'influence, correspondant à U, V, W supposés égaux à l'unité.

D'autre part, désignons par M_i, $F_i + N_i$, T_i les éléments statiques, moment fléchissant, effet normal (général F_i, local N_i), effort tranchant, en un point quelconque d'abscisse x d'un segment d'arbalétrier $\lambda = AB$ par exemple ($i = 1, 4, 8, 11$). Pour le point symétrique du même segment, d'abscisse $\lambda - x$, les éléments statiques similaires, en vertu de la symétrie des charges agissant sur AB, sont : M_i, $F_i - N_i$, $-T_i$. Le travail de déformation du segment AB sera donc

$$\int_0^{\lambda} \frac{M_i^2\,dx}{2EI} + \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{(F_i - N_i)^2\,dx}{2ES} + \int_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda} \frac{(F_i - N_i)^2\,dx}{2ES} + \int_0^{\lambda} \frac{T_i^2\,dx}{2GS}$$

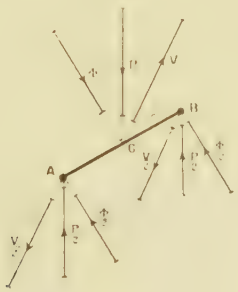
ou

$$2\left[\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{M_i^2}{2EI} + \frac{N_i^2}{2ES} + \frac{T_i^2}{2GS}\right) dx\right] + \int_0^{\lambda} \frac{F_i^2\,dx}{2ES},$$

en désignant par E et G les coefficients d'élasticité longitudinale et transversale des segments d'arbalétriers, de longueur λ, de section S et de moment d'inertie de flexion I.

On pourra donc, dans le calcul du travail de déformation d'un segment d'arbalétrier AB, c'est-à-dire dans l'application du théorème du travail minimum de Castigliano, ne considérer tout d'abord que les efforts secondaires M_i, N_i, T_i, et cela dans la demi-poutre AG, moitié de AB, quitte à doubler les résultats. Le terme F_i, d'effort longitudinal général, provenant du système articulé, sera envisagé lors du calcul du travail de déformation provoqué par les efforts généraux dans toutes les barres de la ferme.

Fig. 20.

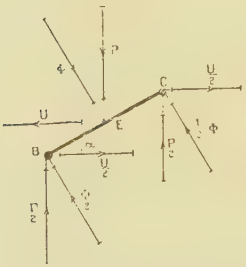


Ceci posé, les éléments statiques en tous les points de chaque segment d'arbalétrier, abstraction faite de l'effort longitudinal F_i, sont :

Arbalétrier (1) (demi-poutre AG, *fig.* 20) :

$$M_1 = \left(\frac{P}{2}\cos\alpha + \frac{\Phi}{2} - \frac{V}{2}\sin\beta\right)x,$$
$$N_1 = \frac{P}{2}\sin\alpha - \frac{V}{2}\cos\beta,$$
$$T_1 = \frac{P}{2}\cos\alpha + \frac{\Phi}{2} - \frac{V}{2}\sin\beta;$$

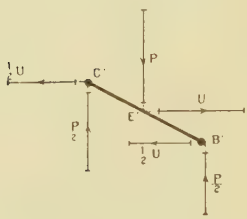
Fig. 21.



Arbalétrier (4) (demi-poutre BE, *fig.* 21) :

$$M_4 = \left(\frac{P}{2}\cos\alpha + \frac{\Phi}{2} - \frac{U}{2}\sin\alpha\right)x,$$
$$N_4 = \frac{P}{2}\sin\alpha + \frac{U}{2}\cos\alpha,$$
$$T_4 = \frac{P}{2}\cos\alpha + \frac{\Phi}{2} - \frac{U}{2}\sin\alpha;$$

Fig. 22.



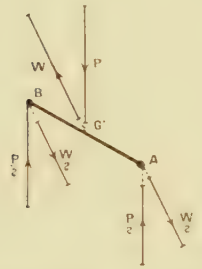
Arbalétrier (8) (demi-poutre B'E', *fig.* 22) :

$$M_8 = \left(\frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{U}{2}\sin\alpha\right)x,$$
$$N_8 = \frac{P}{2}\sin\alpha + \frac{U}{2}\cos\alpha,$$
$$T_8 = \frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{U}{2}\sin\alpha;$$

Arbalétrier (11) (demi-poutre A'G', *fig.* 23) :

$$M_{11} = \left(\frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{W}{2}\sin\beta\right)x,$$
$$N_{11} = \frac{P}{2}\sin\alpha - \frac{W}{2}\cos\beta,$$
$$T_{11} = \frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{W}{2}\sin\beta.$$

Fig. 23.



Les efforts longitudinaux dans les différentes barres du système principal sont :

Arbalétrier (1).....	$F_1 = F_1^P + F_1^\Phi - a_1 V - b_1 W + o \times U$
Tirant (2).....	$F_2 = F_2^P + F_2^\Phi - a_2 V - b_2 W + o \times U$
Bielle (3).....	$F_3 = F_3^P + F_3^\Phi - a_3 V - o \times W - c_3 U$
Arbalétrier (4).....	$F_4 = F_4^P + F_4^\Phi - a_4 V - b_4 W - c_4 U$
Tirant (5).....	$F_5 = F_5^P - F_5^\Phi - a_5 V - b_5 W - c_5 U$
Tirant (6).....	$F_6 = F_6^P + F_6^\Phi - a_6 V - b_6 W + c_6 U$
Tirant (7).....	$F_7 = F_7^P + F_7^\Phi - a_7 V - b_7 W - c_7 U$
Arbalétrier (8).....	$F_8 = F_8^P + F_8^\Phi - a_8 V - b_8 W - c_8 U$
Bielle (9).....	$F_9 = F_9^P + o^\Phi - o \times V - b_9 W - c_9 U$
Tirant (10).....	$F_{10} = F_{10}^P + F_{10}^\Phi - a_{10} V - b_{10} W + o \times U$
Arbalétrier (11).....	$F_{11} = F_{11}^P + F_{11}^\Phi - a_{11} V - b_{11} W + o \times U$

Les efforts longitudinaux dans les barres de soutien sont U (entrait), V (aissellier gauche), W (aissellier droit).

Appelons τ le travail de déformation du système total constitué par la ferme renforcée. Nous aurons, d'après le théorème du travail minimum,

$$\frac{\partial\tau}{\partial U} = o, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial V} = o, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial W} = o,$$

trois équations qui permettront de déterminer U, V, W.

Calculcons d'abord $\frac{\partial \tau}{\partial U} = o$. La partie de cette équation relative aux efforts secondaires M_i, N_i, T_i des segments d'arbalétriers se rapporte aux seules pièces (4) et (8) et s'écrit

$$2\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{M_4}{EI} \frac{\partial M_4}{\partial U} + \frac{N_4}{ES} \frac{\partial N_4}{\partial U} + \frac{T_4}{GS} \frac{\partial T_4}{\partial U} \right) dx$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{M_8}{EI} \frac{\partial M_8}{\partial U} + \frac{N_8}{ES} \frac{\partial N_8}{\partial U} + \frac{T_8}{GS} \frac{\partial T_8}{\partial U} \right) dx,$$

c'est-à-dire

$$\frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \left(P\cos\alpha + \frac{\Phi}{2} - U\sin\alpha \right) x \left(-x \frac{\sin\alpha}{2} \right) dx$$

$$+ \frac{2}{ES} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} (P\sin\alpha + U\cos\alpha) \left(\frac{\cos\alpha}{2} \right) dx$$

$$+ \frac{2}{GS} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \left(P\cos\alpha + \frac{\Phi}{2} - U\sin\alpha \right) \left(-\frac{\sin\alpha}{2} \right) dx$$

ou, après calculs,

$$\frac{U\lambda^3 \sin\alpha}{24EI} - \frac{\lambda^3 \sin\alpha}{24EI} \left(P\cos\alpha + \frac{\Phi}{2} \right) + \frac{U\lambda \cos^2\alpha}{2ES}$$

$$+ \frac{P\lambda \sin\alpha\cos\alpha}{2ES} + \frac{U\lambda \sin^2\alpha}{2GS} - \frac{\lambda \sin\alpha}{2GS} \left(P\cos\alpha + \frac{\Phi}{2} \right) = \frac{1}{E}(fU - g),$$

en posant

$$f = \frac{\lambda^3 \sin^2\alpha}{24I} + \frac{\lambda}{4S}(2\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha),$$

$$g = \frac{\lambda^3 \sin\alpha}{48I}(2P\cos\alpha + \Phi) + \frac{\lambda \sin\alpha}{8S}(6P\cos\alpha + 5\Phi),$$

avec

$$G = \frac{2}{5}E.$$

La partie de l'équation $\frac{\partial \tau}{\partial U} = o$ relative aux effort longitudinaux dans les barres du système principal s'écrit sous forme générique :

$$\sum \int_0^{l_k} \frac{F_k}{ES_k} \frac{\partial F_k}{\partial U} dx = \sum \mp \frac{l_k c_k}{ES_k} F_k.$$

on voit qu'elle se rapporte exclusivement aux barres (3), (4), (5),

(6), (7), (8), (9). Elle s'écrit :

$$(3) \qquad -\frac{qc_3}{E\rho}(F_3^P + F_3^\Phi - a_3 V - c_3 U),$$

$$(4) \qquad -\frac{\lambda c_4}{ES}(F_4^P + F_4^\Phi - a_4 V - b_4 W - c_4 U),$$

$$(5) \qquad -\frac{t c_5}{E\varepsilon}(F_5^P + F_5^\Phi - a_5 V - b_5 W - c_5 U),$$

$$(6) \qquad +\frac{l c_6}{E\sigma}(F_6^P + F_6^\Phi - a_6 V - b_6 W + c_6 U),$$

$$(7) \qquad -\frac{t c_7}{E\varepsilon}(F_7^P + F_7^\Phi - a_7 V - b_7 W - c_7 U),$$

$$(8) \qquad -\frac{\lambda c_8}{ES}(F_8^P + F_8^\Phi - a_8 V - b_8 W - c_8 U),$$

$$(9) \qquad -\frac{qc_9}{\rho}(F_9^P - b_9 W - c_9 U).$$

Enfin la partie de $\frac{\partial \tau}{\partial U} = 0$ qui se rapporte aux organes de soutien ne s'applique qu'à l'entrait et donne

$$\int_0^L \frac{U}{E\Omega}\frac{\partial U}{\partial U}\,dx = \frac{UL}{E\Omega}.$$

Après toutes réductions, l'équation $\frac{\partial \tau}{\partial U} = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned}(44)\quad & U\left(\frac{2\lambda}{S}c_4^2 + f + \frac{2q}{\rho}c_3^2 + \frac{2t}{\varepsilon}c_5^2 + \frac{l}{\sigma}c_6^2 + \frac{L}{\Omega}\right)\\ & + V\left[\frac{\lambda}{S}c_4(a_4 + a_8) + \frac{q}{\rho}c_3 a_3 + \frac{t}{\varepsilon}c_5(a_5 + a_7) - \frac{l}{\sigma}c_6 a_6\right]\\ & + W\left[\frac{\lambda}{S}c_4(b_4 + b_8) + \frac{q}{\rho}c_9 a_9 + \frac{t}{\varepsilon}c_5(b_5 + b_7) - \frac{l}{\sigma}c_6 b_6\right]\\ = \; & \frac{\lambda}{S}c_4(2F_4^P + F_4^\Phi + F_8^\Phi) + g + \frac{q}{\rho}c_3(2F_3^P + F_3^\Phi)\\ & + \frac{t}{\varepsilon}c_5(2F_5^P + F_5^\Phi + F_7^\Phi) - \frac{l}{\sigma}c_6(F_6^P + F_6^\Phi).\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\frac{\partial \tau}{\partial V} = 0$. La partie relative aux efforts secondaires M_1, N_1, T_1 s'applique au segment d'arbalétrier (1) exclusivement, et donne

$$2\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{M_1}{EI}\frac{\partial M_1}{\partial V} + \frac{N_1}{ES}\frac{\partial N_1}{\partial V} + \frac{T_1}{GS}\frac{\partial T_1}{\partial V}\right)dx$$

ou

$$\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{P}{2}\cos\alpha+\frac{\Phi}{2}-\frac{V}{2}\sin\beta\right)x\left(-x\frac{\sin\beta}{2}\right)dx$$
$$+\frac{2}{ES}\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{P}{2}\sin\alpha-\frac{V}{2}\cos\beta\right)\left(-\frac{\cos\beta}{2}\right)dx$$
$$+\frac{2}{GS}\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{P}{2}\cos\alpha+\frac{\Phi}{2}-\frac{V}{2}\sin\beta\right)\left(-\frac{\sin\beta}{2}\right)dx$$

et, après tous calculs,

$$\frac{V\lambda^3\sin^2\beta}{48EI}-\frac{\lambda^3\sin\beta\left(P\cos\alpha+\frac{\Phi}{2}\right)}{48EI}+\frac{\lambda\cos^2\beta V}{4ES}$$
$$-\frac{\lambda P\sin\alpha\cos\beta}{4ES}+\frac{\lambda\sin^2\beta V}{4GS}-\frac{\lambda\sin\beta(P\cos\alpha+\Phi)}{4GS}=\frac{1}{E}(hV-k).$$

en posant

$$G=\frac{2}{5}E\qquad\text{et}\qquad h=\frac{\lambda^3\sin^2\beta}{48I}+\frac{\lambda(2\cos^2\beta+5\sin^2\beta)}{8S},$$
$$k=\frac{\lambda^3\sin\beta(P\cos\alpha+\Phi)}{48I}+\frac{\lambda}{8S}[2P\sin\alpha\cos\beta+5\sin\beta(P\cos\alpha+\Phi)].$$

Quant aux efforts longitudinaux des barres du système principal ils s'appliquent pour l'équation $\frac{\partial\tau}{\partial V}=0$ à toutes les pièces, sauf (9); on a

$$\sum\int_0^{l_k}\frac{F_k}{ES_k}\frac{\partial F_k}{\partial V}dx=\sum-\frac{l_k a_k}{ES_k}F_k,$$

c'est-à-dire :

(1) $$-\frac{\lambda a_1}{ES}(F_1^P+F_1^\Phi-a_1V-b_1W),$$

(2) $$-\frac{ta_2}{E\theta}(F_2^P+F_2^\Phi-a_2V-b_2W),$$

(3) $$-\frac{qa_3}{E\rho}(F_3^P+F_3^\Phi-a_3V-c_3U),$$

(4) $$-\frac{\lambda a_4}{ES}(F_4^P+F_4^\Phi-a_4V-b_4W-c_4U),$$

(5) $$-\frac{ta_5}{E\varepsilon}(F_5^P+F_5^\Phi-a_5V-b_5W-c_5U),$$

(6) $$-\frac{la_6}{E\sigma}(F_6^P+F_6^\Phi-a_6V-b_6W+c_6U),$$

et

$$(7) \qquad -\frac{ta_7}{E\varepsilon}\,(F_7^p + F_7^{\Phi'} - a_7\,V - b_7\,W - c_7 U),$$

$$(8) \qquad -\frac{\lambda a_8}{ES}\,(F_8^p + F_8^{\Phi} - a_8\,V - b_8\,W - c_8 U),$$

$$(10) \qquad -\frac{ta_{10}}{E\theta}\,(F_{10}^p + F_{10}^{\Phi} - a_{10}V - b_{10}W),$$

$$(11) \qquad -\frac{\lambda a_{11}}{ES}\,(F_{11}^p + F_{11}^{\Phi} - a_{11}V - b_{11}W).$$

Les efforts longitudinaux des organes de soutien dans $\frac{\partial \tau}{\partial V} = 0$ s'appliquent à l'aisselier gauche seul et donnent

$$\int_0^{\mathfrak{L}} \frac{V}{E\omega}\,\frac{\partial V}{\partial V}\,dx = \frac{V\mathfrak{L}}{E\omega}.$$

Après toutes réductions, l'équation $\frac{\partial \tau}{\partial V} = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned}(45) \qquad & U\left[\frac{\lambda}{S}c_4(a_4+a_8) + \frac{q}{\rho}c_3a_3 + \frac{t}{\varepsilon}c_5(a_5+a_7) - \frac{l}{\sigma}c_6a_6\right] \\ & + V\left[\frac{\lambda}{S}(a_1^2+a_4^2+2a_8^2) + h + \frac{q}{\rho}a_3^2 \right. \\ & \qquad \left. + \frac{t}{\theta}(a_2^2+a_{10}^2) + \frac{t}{\varepsilon}(a_5^2+a_7^2) + \frac{l}{\sigma}a_6^2 + \frac{\mathfrak{L}}{\omega}\right] \\ & + W\left[\frac{\lambda}{S}(a_1b_1 + a_{11}b_{11} + a_4b_4 + a_8b_8) \right. \\ & \qquad \left. + \frac{t}{\theta}(a_2b_2 + a_{10}b_{10}) + \frac{t}{\varepsilon}(a_5b_5 + a_7b_7) + \frac{l}{\sigma}a_6b_6\right] \\ = \; & \frac{\lambda}{S}[F_1^p(a_1+a_{11}) + F_4^p(a_4+a_8) + F_1^{\Phi}a_1 + F_{11}^{\Phi}a_{11} \\ & \qquad + F_4^{\Phi}a_4 + F_8^{\Phi}a_8] + k \\ & + \frac{q}{\rho}a_3(F_3^p + F_3^{\Phi}) + \frac{t}{\theta}[F_2^p(a_2+a_{10}) + F_2^{\Phi}a_2 + F_{10}^{\Phi}a_{10}] \\ & + \frac{t}{\varepsilon}[F_5^p(a_5+a_7) + F_5^{\Phi}a_5 + F_7^{\Phi}a_7] + \frac{l}{\sigma}a_6(F_6^p + F_6^{\Phi}).\end{aligned}$$

Calculons enfin $\frac{\partial \tau}{\partial W} = 0$. La partie de cette équation relative aux efforts secondaires M_i, N_i, T_i s'applique exclusivement à la barre (11) et donne

$$2\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{M_{11}}{EI}\,\frac{\partial M_{11}}{\partial W} + \frac{N_{11}}{ES}\,\frac{\partial N_{11}}{\partial W} + \frac{T_{11}}{GS}\,\frac{\partial T_{11}}{\partial W}\right) dx$$

ou

$$\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left(P\cos\alpha-\frac{W}{2}\sin\beta\right)x\left(-x\frac{\sin\beta}{2}\right)dx$$

$$+\frac{2}{ES}\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{P}{2}\sin\alpha-\frac{W}{2}\cos\beta\right)\left(-\frac{\cos\beta}{2}\right)dx$$

$$+\frac{2}{GS}\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{P}{2}\cos\alpha-\frac{W}{2}\sin\beta\right)\left(-\frac{\sin\beta}{2}\right)dx$$

$$=\frac{W\sin^2\beta\lambda^3}{48EI}-\frac{\lambda^3\sin\beta P\cos\alpha}{48EI}+\frac{\lambda\cos^2\beta W}{4ES}-\frac{\lambda P\sin\alpha\cos\beta}{4ES}$$

$$+\frac{\lambda\sin^2\beta W}{4GS}-\frac{\lambda\sin\beta P\cos\alpha}{4GS}=\frac{1}{E}(hW-j),$$

en posant

$$G=\frac{2}{5}E \qquad \text{et} \qquad j=\frac{\lambda^3\sin\beta P\cos\alpha}{48I}+\frac{\lambda P}{8S}(2\sin\alpha\cos\beta+5\sin\beta\cos\alpha),$$

h déjà connu.

D'autre part, les efforts longitudinaux dans les barres du système principal, pour l'équation $\frac{\partial\tau}{\partial W}=0$, s'appliquent à toutes les barres, sauf (3), et donnent

$$\sum\int_0^{l_k}\frac{F_k}{ES_k}\frac{\partial F_k}{\partial W}dx=\sum\frac{-l_k b_k F_k}{ES_k},$$

c'est-à-dire

(1) $$-\frac{\lambda b_1}{ES}\ (F_1^P+F_1^\Phi-a_1 V-b_1 W),$$

(2) $$-\frac{t b_2}{E\theta}\ (F_2^P+F_2^\Phi-a_2 V-b_2 W),$$

(4) $$-\frac{\lambda b_4}{ES}\ (F_4^P+F_4^\Phi-a_4 V-b_4 W-c_4 U),$$

(5) $$-\frac{t b_5}{E\varepsilon}\ (F_5^P+F_5^\Phi-a_5 V-b_5 W-c_5 U),$$

(6) $$-\frac{l b_6}{E\sigma}\ (F_6^P+F_6^\Phi-a_6 V-b_6 W+c_6 U),$$

(7) $$-\frac{t b_7}{E\varepsilon}\ (F_7^P+F_7^\Phi-a_7 V-b_7 W-c_7 U),$$

(8) $$-\frac{\lambda b_8}{ES}\ (F_8^P+F_8^\Phi-a_8 V-b_8 W-c_8 U),$$

et

$$(9) \qquad -\frac{q\,b_9}{E\rho}\,(F_9^p - b_9\,W - c_9\,U),$$

$$(10) \qquad -\frac{t\,b_{10}}{E\theta}\,(F_{10}^p + F_{10}^\Phi - a_{10}\,V - b_{10}\,W),$$

$$(11) \qquad -\frac{\lambda\,b_{11}}{ES}\,(F_{11}^p + F_{11}^\Phi - a_{11}\,V - b_{11}\,W).$$

Fig. 24.

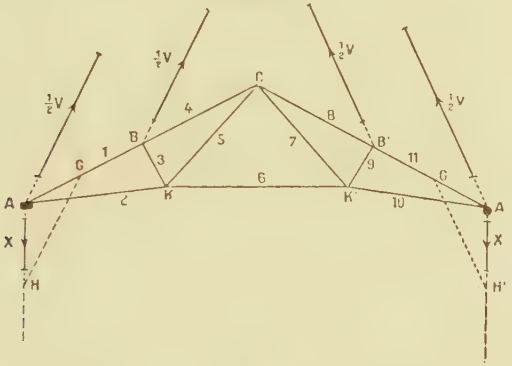
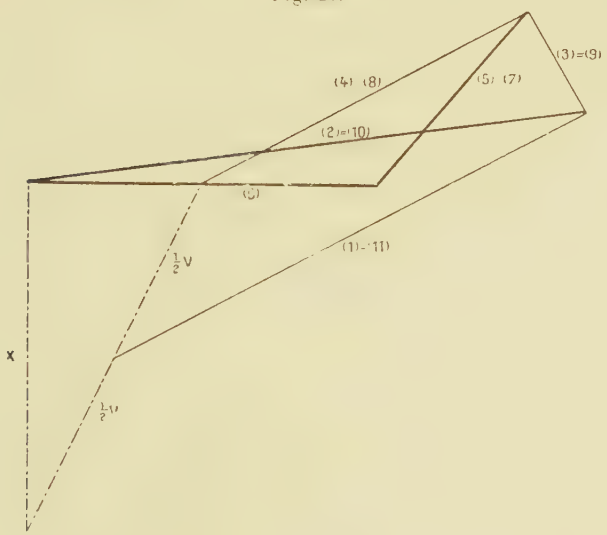


Fig. 25.



Les efforts longitudinaux des organes de soutien pour $\frac{\partial \tau}{\partial W} = 0$ s'appliquent uniquement à l'aissellier droit et donnent

$$\int_0^{\mathfrak{L}} \frac{W}{E\omega}\,\frac{\partial W}{\partial W}\,dx = \frac{W\,\mathfrak{L}}{E\omega}.$$

Après toutes réductions, l'équation $\frac{\partial \tau}{\partial W} = 0$ s'écrit

$$
\begin{aligned}
(46)\quad & U\left[\frac{\lambda}{S}c_4(b_4+b_8)+\frac{q}{\rho}c_9b_9+\frac{t}{\varepsilon}c_5(b_5+b_7)-\frac{l}{\sigma}c_6b_6\right] \\
& +V\left[\frac{\lambda}{S}(a_1b_1+a_{11}b_{11}+a_4b_4+a_8b_8)\right. \\
& \qquad \left.+\frac{t}{\theta}(a_2b_2+a_{10}b_{10})+\frac{t}{\varepsilon}(a_5b_5+a_7b_7)+\frac{l}{\sigma}a_6b_6\right] \\
& +W\left[\frac{\lambda}{S}(2b_4^2+b_{11}^2+b_8^2)+h+\frac{q}{\rho}b_9^2\right. \\
& \qquad \left.+\frac{t}{\theta}(b_2^2+b_{10}^2)+\frac{t}{\varepsilon}(b_5^2+b_7^2)+\frac{l}{\sigma}b_6^2+\frac{\varphi}{\omega}\right] \\
= \quad & \frac{\lambda}{S}[F_1^p(b_1+b_{11})+F_4^p(b_4+b_8) \\
& \qquad +F_1^pb_1+F_{11}^\Phi b_{11}+F_4^\Phi b_4+F_8^\Phi b_8]+j \\
& +\frac{q}{\rho}F_9^pb_9+\frac{t}{\theta}[F_2^p(b_2+b_{10})+F_2^\Phi b_2+F_{10}^\Phi b_{10}] \\
& +\frac{t}{\varepsilon}[F_5^p(b_5+b_7)+F_5^\Phi b_5+F_7^\Phi b_7]+\frac{l}{\sigma}b_6(F_6^p+F_6^\Phi).
\end{aligned}
$$

Les équations (44), (45), (46) sont de la forme

$$
\begin{aligned}
mU+nV+pW&=\xi,\\
nU+dV+sW&=\eta,\\
pU+sV+rW&=\zeta;
\end{aligned}
$$

le déterminant des inconnues est symétrique par rapport à l'une de ses diagonales ; on pourra résoudre ces équations par les méthodes connues de Cramer et le développement de Sarrus. On aura ainsi U, V, W.

Dans le cas de charges exclusivement verticales, $\Phi = 0$, $V = W$, et l'on a

$a_1 = b_{11}$,	$a_{11} = b_1$,	d'où	$a_1+b_1 = a_{11}+b_{11} = A_1 = A_{11}$,
$a_2 = b_{10}$,	$a_{10} = b_2$,	»	$a_2+b_2 = a_{10}+b_{10} = A_2 = A_{10}$,
$a_3 = b_9$,	$a_9 = b_3$,	»	$a_3+b_3 = a_9+b_9 = A_3 = A_9$,
$a_4 = b_8$,	$a_8 = b_4$,	»	$a_4+b_4 = a_8+b_8 = A_4 = A_8$,
$a_5 = b_7$,	$a_7 = b_5$,	»	$a_5+b_5 = a_7+b_7 = A_5 = A_7$,
	$a_6 = b_6$,	»	$a_6+b_6 = A_6$;

avec

$$g=\frac{\lambda^3\sin\alpha\,P\cos\alpha}{24I}+\frac{3\lambda\sin\alpha\,P\cos\alpha}{4S}=\gamma.$$

Graphiquement les A_1, A_2, ... sont donnés par le diagramme

(*fig.* 24 et 25). Les inconnues U et V sont fournis par les deux équations :

$$(47)\qquad U\left[\frac{2\lambda}{S}c_4^2+f+\frac{2q}{\rho}c_3^2+\frac{2t}{\varepsilon}c_5+\frac{l}{\sigma}c_6^2+\frac{L}{\Omega}\right]+V\left(\frac{2\lambda}{S}c_4A_4+\frac{2q}{\rho}c_3A_3+\frac{2t}{\varepsilon}c_5A_5-\frac{l}{\sigma}c_6A_6\right)=\frac{2\lambda}{S}c_4F_4^P+\gamma+\frac{2q}{\rho}c_3F_3^P+\frac{2t}{\varepsilon}F_5^P-\frac{l}{\sigma}c_6F_6^P$$

et

$$(48)\quad U\left(\frac{2\lambda}{S}c_4A_4+\frac{2q}{\rho}c_3A_3+\frac{2t}{\varepsilon}c_5A_5-\frac{l}{\sigma}c_6A_6\right)-V\left(\frac{2\lambda}{S}(A_1^2+A_4^2)+2h+\frac{2q}{\rho}A_3^2+\frac{2t}{0}A_2^2+\frac{2t}{\varepsilon}A_5^2+\frac{l}{\sigma}A_6^2+\frac{2\mathfrak{L}}{\omega}\right)=\frac{2\lambda}{S}(A_1F_2^P-A_4F_4^P)+2j-\frac{2q}{\rho}A_3F_3^P+\frac{2t}{0}A_2F_2^P+\frac{2t}{\varepsilon}A_5F_5^P+\frac{l}{\sigma}A_6F_6^P.$$

Les deux équations (47) et (48) sont encore à déterminant symétrique.

La même méthode de calcul s'étend à une ferme Polonceau comportant un nombre quelconque de pannes intermédiaires (non aux nœuds), à espacements égaux en général.

Elle s'applique, par réduction, aux fermes courantes dites *unitriangulaires*, composées d'un simple tirant horizontal et de deux arbalétriers dont les milieux sont réunis par un entrait.

Vu et approuvé :

Nancy, le 28 juillet 1913.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. FLOQUET.

Vu et permis d'imprimer .

Nancy, le 28 juillet 1913.

Le Recteur de l'Académie de Nancy,

Ch. ADAM,

Correspondant de l'Institut.

BIBLIOGRAPHIE.

Brune (E.), professeur à l'École des Beaux-Arts. — *Traité de Construction*, revu par M. Flamant, inspecteur général des Ponts et Chaussées (Paris, Librairie des Imprimeries réunies, 1888).

Castigliano (Alberto), ingénieur des Chemins de fer de la Haute-Italie. — *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications* (publié en français chez Negro, éditeur, Turin, 1879). — *Intorno ad una proprieta dei sistemi elastici* (*Atti della Accademica delle Scienze di Torino*, juin 1882).

Fontviolant (Bertrand de), professeur de Résistance des matériaux à l'École centrale, ingénieur en chef des Constructions métalliques à la Compagnie de Fives-Lille. — Publications du *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*. — *Calcul des Poutres continues* (septembre 1885). — Mémoire sur les « Déformations élastiques des pièces et systèmes de pièces à fibre moyenne plane ou gauche » (août 1888 et mars 1889). — Mémoire sur la « Statique graphique des arcs élastiques» (avril 1890). Une analyse de ce Mémoire a été insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, 31 mars 1890, sur la présentation de M. Maurice Lévy. — *Méthode générale pour la détermination des lignes d'influence dans les poutres pleines ou réticulaires assujetties à des conditions surabondantes* (novembre 1890). — *L'équation générale de l'Elasticité des constructions et ses applications* (octobre 1907).

Fränkel.— *Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elasticher Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben* (*Zeitschrift der Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 1882, p. 63).

Föppl, professeur à l'Université technique de Munich. — *Theorie des Fachwerks* (Leipzig, 1880). — *Vorlesungen über technische Mechanik* (Leipzig, 1907).

Grashof. — *Théorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendung in der Technik* (1866-1878).

Henneberg. — *Statik der starren Systeme* (Leipzig, 1886).

Könen. — *Vereinfachung der Berechnung kontinuirlichen Balken mit Hülfe des Satzes von der Arbeit* (*Wochenblatt fur Architekten und Ingenieur*, 1882, p. 204).

Köchlin (Maurice), ingénieur en chef des Constructions métalliques de Levallois-Perret. — *Les applications de la Statique graphique* (2 volumes, 1889-1910).

Krohn. — *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerksträger* (*Zeitschrift... zu Hannover*, 1884, p. 269).

Land. — *Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen* (*Wochenblatt fur Baukunde*, 1887, p. 14).

Lévy (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des Ponts et Chaussées. — *La Statique graphique et ses applications* (4 volumes, 1884-1888).

Landsberg. — *Ebene Fachwerksystème mit festen knotenpunkten und das Princip der Deformations Arbeit* (*Centralblatt der Bauverwaltung*, 1895, p. 165).

Maxwell (Clerk). — *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames* (*Philosophical Magazine*, 1864).

Melan. — *Berechnung eiserner Hallengespärre unter Anwendung des Satzes. von der kleinsten Arbeit* (*Wochenschrift des œsterreichen Architekten und Ingenieur Vereins*, 1883, p. 149-162).

Menabrea (général), ancien ambassadeur d'Italie à Paris. — *Principe général pour déterminer les pressions et tensions dans un système élastique* (*Publié* en français chez Bocca, à Turin, 1868, et à Paris, chez Gauthier-Villars).

Mohr (Otto). — *Beitrag zur Theorie Bogenfachwerksträger* (*Zeitschrift.. zu Hannover*, 1874).— *Beitrag zur Theorie des Fachwerks* (*Ibid.* 1874-1875).— *Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerks* (*Ibid.* 1881). — *Beitrag zur Theorie des Fachwerks* (*Civil Ingénieur*, 1885). — *Ueber das genannte Princip des kleinsten Deformation-Arbeit* (*Wochenblatt fur Architekten und Ingenieur*, 1883). — *Die Berechnung des Fachwerks mit knoten Verbindungen* (*Civil Ingenieur*, 1892-1893). — *Technische Mechanik*, rédigée d'après les leçons de Mohr et publiées par l'Association du Polytechnicum de Stuttgard, 1877. — Ces différents articles ont été résumés et réunis en un corps de doctrine dans l'Ouvragepublié à Berlin par l'auteur et intitulé *Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik* (Mémoire n° 11).

Müller-Breslau, professeur à l'Université technique de Berlin. — *Ueber kontinuirliche Bogen und Balken* (*Wochenblatt für Architekten und Ingenieur*, 1884). — *Ueber einige Aufgaben der Statik welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen* (*Zeitschrift für Bauwesen*, 1891). — *Die neueren Methoden des Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstructionen* (Leipzig, Baumgartner's Buchhandlung, 1904).

Swain. — *On the application of the principle of virtuel velociter to the determination of the deflection and stresses of frames* (*Journal of the Franklin Institute*, 1883).

Weyrauch. — *Arbeitsbedingungen fur Statik unbestimmte Systeme.*

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Origine et développement du principe des vitesses virtuelles. Portée de ce principe.

Vu et approuvé :
Nancy, le 28 juillet 1913.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
G. FLOQUET.

Vu et permis d'imprimer :
Nancy, le 28 juillet 1913.
Le Recteur de l'Académie de Nancy,
Ch. ADAM,
Correspondant de l'Institut.

53257 Paris. — Imp. Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
53257 Quai des Grands-Augustins, 55